

多準則投資組合最佳化分析： 結合 K-MOPSO 及 TOPSIS

許晉雄¹ 鄒慶士²

(收稿日期：97年10月6日；第一次修正：98年1月10日；接受刊登日期：98年3月18日)

摘 要

如何將有限的資金在眾多投資標的中作有效的配置，是財務管理領域中一個重要的議題，此議題稱為投資組合選擇，基本上它是屬於一個多目標最佳化的問題。在過去的文獻中，處理投資組合選擇問題大多是將具有衝突性的目標合併為單一目標的形式，並以單目標最佳化的技術來進行求解，但所得到的解未必是令人滿意的，主要是因為並不能保證得到的解為非凌越解，特別是當投資組合最佳化模型中包含一些實務上所需的限制條件時，例如：基數限制。故本研究將以啟發式多目標微粒群最佳化技術為基礎，運用背包型多目標微粒群最佳化演算法，針對投資組合問題進行求解，並在賣空與基數限制的條件下獲得效率之投資組合。最後，針對有效的投資組合，應用多屬性決策分析中的TOPSIS法，對投資組合進行分析排序，提供投資者更多樣化之投資組合選擇，由研究結果可發現投資者在選擇其投資組合時，應考慮更多元的投資績效指標。

關鍵詞：投資組合、多目標最佳化、背包型多目標微粒群最佳化、多屬性決策分析

* 1. 東吳大學財務工程與精算數學系
2. 國立台北商業技術學院企業管理系

壹、研究動機與目的

投資組合的學術研究，最早為 Markowitz 於 1952 年「Portfolio Selection」文章中所提出的「投資組合理論」，即以歷史報酬的平均數與變異數衡量投資組合的預期報酬與風險，做為選擇投資組合的依據，其基本假設為投資者皆遵循效率原則，在一定的投資報酬率水準上，選擇使投資風險極小化之效率投資組合，此最佳化問題可表示為二次規劃之模式。在此模型下，所有不同報酬水準下的效率投資組合之集合即構成效率前緣(Efficient Frontier)，位於效率前緣上之投資組合，皆為效率投資組合。因此，在 Markowitz 的投資組合理論中，對於上述風險性投資組合選擇模型通常稱為平均-變異數模型(Mean Variance Model)。

傳統 Markowitz 的平均-變異數模型僅考慮不允許賣空的情況，且只能讓投資者擁有單一的目標，亦即追求風險極小化，但往往投資者追求是多目標的，也就是說同時追求報酬極大化和風險極小化，因此在本質上是屬於多目標決策問題，此問題可運用多目標最佳化 (Multi-Objective Optimization, MOO) 來求解投資組合的問題，以協助投資者在眾多目標下尋找有效之投資組合。近年來許多學者，提出投資組合選擇問題應以多目標最佳化模型的進行求解，例如 Ehrgott、Klamroth 及 Schwehm (2004) 針對 Markowitz 的平均-變異數模型進行延伸，在文中提出五個衡量目標的準則，除了傳統的平均報酬與變異數外，還有股票 12 個月和 3 年之績效表現、股票之每年現金股利、股票在 Standard and Poors Star Ranking 的評等表現及股票之波動率變化程度來衡量投資組合之績效。其次，Subbu、Bonissone、Eklund、Bollapragada 及 Chalermkraivuth (2005) 針對投資組合之問題提出以三目標最佳化方法進行衡量，亦即極大化投資組合預期報酬、極小化變異數以及極小化投資組合風險值(Portfolio Value at Risk)。

近年來關於求解投資組合問題之演算法應用，大多是以模擬退火法 (Simulated Annealing)、塔布搜尋法 (Tabu Search) 和基因演算法 (Genetic Algorithm) 等演算法進行求解，其中，Chang、Meade、Beasley 及 Sharaiha (2000) 利用遺傳演算法求解實務交易中關於基數限制(Cardinality Constraints)之投資組合問題，以及針對各投資標的設定投資比例的範圍，進而建構出基數限制下之效率

前緣。另外，Ehrgott *et al.*(2004)提出一個基於多屬性效用理論的投資組合最佳化模型，來延伸起源於Markowitz所提出之平均-變異數模型，並以客製化區域搜尋方法(Customized Local Search)、模擬退火法、塔布搜尋法和基因演算法進行實證分析。其次，Makoto、Hiroaki及Haruhiko(2007)以微粒群最佳化(Particle Swarm Optimization, PSO)演算法求解投資組合選擇問題，他們合併慣性權重法(Inertia Weight Approach)和收縮係數法(Constriction Factor Approach)，作為PSO算法中粒子更新法則，經實證發現此改良後的PSO算法，在尋找最佳解的精確度上均優於模擬退火法、塔布搜尋法和基因演算法。然而上述研究大都將雙目標之平均-變異數模型先轉換成單目標最佳化模型，再以通用啟發式演算法(Meta-Heuristic Algorithm)來求解，此些文獻並未運用多目標最佳化中柏拉圖最佳化(Pareto Optimality)的觀念求解。

本研究擬利用兩階段多準則決策分析法(Two-stage Multi-criteria Decision Analysis Method)來找尋最佳投資組合，首先，應用柏拉圖式多目標最佳化演算法來求解投資組合問題。另外，參考Clark、Hindelang及Pritchard(1989)和Nemhauser及Ullmann(1969)將背包問題(Knapsack Problem)導入資本預算決策問題中的理念，提出背包型多目標微粒群演算法(Knapsack Multi-Objective Particle Swarm Optimization, K-MOPSO)。利用K-MOPSO對無偏好之多目標投資組合模型，在不同基數限制下，分別針對允許賣空或不允許賣空情況進行求解，本研究可在權衡報酬－風險關係之下，提供全面性的最佳化投資組合。最後，本研究在多屬性決策分析(Multi-Attribute Decision Analysis)方面，以投資組合之預期報酬、風險作為投資組合的評選依據，期能提供投資者多元化的投資組合選擇。

貳、投資組合多目標最佳化

一、投資組合模式

投資組合係指由一種以上的證券或資產構成的集合，投資組合理論的焦點在於如何使風險最低、報酬率最大，及如何在風險與投資績效間作取捨。關於投資組合模型最為有名的是Markowitz在1952所提出的平均－變異數模型，此模型開啟金融投資量化研究的開端，成為金融投資理論研究的

主要議題和決策實踐的重要工具。平均－變異數模型藉由分析變異數－共變異數矩陣(Variance - Covariance Matrix)，進而推導出報酬率及標準差構面下之效率前緣，期使風險（以報酬率之標準差衡量）固定的情況下，可使報酬率達到最大；或在報酬率固定之下，使得風險降到最低，據以制定投資之決策。針對平均－變異數模式，已有許多文獻做不同的探討，如Kendall及Su (2005)認為風險性投資組合模型有兩種類型：未受限制的風險性投資組合模型以及受限制的風險性投資組合模型，前者為投資者可利用賣空(Short Sale)股票的方式進行投資；反之，後者為投資者在選擇投資組合時是在不允許賣空的限制下進行投資，他們指出在建立投資組合模型時，應同時考慮不允許賣空以及允許賣空的情況，會更具有實際應用價值。另外，Elton、Gruber、Brown及Goetzmann (2002)對於投資組合問題在模型中納入最低交易成本的限制條件，探討加入不同交易成本條件對於投資組合的影響。

在傳統的平均－變異數模型中，假設有 n 項資產可以投資，投資者欲決定各項資產之投資比例，所以投資組合最佳化問題的決策變數為各資產權重 $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 所形成之向量，以 $\vec{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ 表示，且 $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ 。另外，各資產的平均報酬為 p_i ，以向量 $\vec{p} = [p_1, p_2, \dots, p_n]^T$ 表示所有資產的平均報酬。因此，投資組合預期報酬為個別資產報酬加權平均，以 $x_p = \vec{p}^T \vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i p_i$

表示，而資產的變異數和共變異數以矩陣 $V = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}$ 表示，其中 σ_{ii} 為資

產 i 的變異數， σ_{ij} 為資產 i 和資產 j 的共變異數，所以投資組合的變異數以 $\sigma_p^2 = \vec{x}^T V \vec{x}$ 表示。因此，一般平均-變異數模型即是探討下列模式之最佳化問題：

$$\begin{aligned}
 &\text{極大化} && x_p = \vec{\mathbf{p}}^T \vec{\mathbf{x}} \\
 &\text{極小化} && \sigma_p^2 = \vec{\mathbf{x}}^T \mathbf{V} \vec{\mathbf{x}} \\
 &\text{受限制於} && \\
 &&& \vec{\mathbf{1}}^T \vec{\mathbf{x}} = 1 \\
 &\text{且} && x_i \geq 0, \forall i
 \end{aligned} \tag{1}$$

一般而言，處理上述模型可將其轉化為如下之單目標最佳化問題：

$$\begin{aligned}
 &\text{極小化} && -\vec{\mathbf{p}}^T \vec{\mathbf{x}} + \gamma \vec{\mathbf{x}}^T \mathbf{V} \vec{\mathbf{x}} \\
 &\text{受限制於} && \\
 &&& \vec{\mathbf{1}}^T \vec{\mathbf{x}} = 1 \\
 &\text{且} && x_i \geq 0, \forall i
 \end{aligned} \tag{2}$$

其中 γ 為風險驅避指標，且 $\gamma \geq 0$ 。

為了將平均－變異數模型應用到實際的投資組合問題上，我們必須先估計期望報酬 p_i 與變異數－共變異數 σ_{ij} 。首先假設在觀察時間 T 內，收集到的平均報酬資料為 p_{it} ， $i = 1, 2, \dots, n$ 且 $t = 1, 2, \dots, T$ ，則期望報酬與變異數－共變異數的估計值可分別為 $\bar{p}_i = \sum_{t=1}^T p_{it} / T$ 及 $\bar{\sigma}_{ij} = \sum_{t=1}^T (p_{it} - \bar{p}_i)(p_{jt} - \bar{p}_j) / T$ 。

另外有關於投資組合的限制部分，隨著因應投資市場實務上的需要，學者們提出不同的限制條件，例如，投資者若考慮第 i 個投資標的物的上下界，則模式中必須加入條件：

$$l_i \leq x_i \leq u_i, \forall i$$

其中 l_i 代表第 i 個投資標的物的下界，且 u_i 代表第 i 個投資標的物的上界。

而當投資者受到投資支數總量上限的規定時，則必須加入下列條件：

$$\sum_{i=1}^n z_i \leq k \text{ 且 } z_i = \begin{cases} 1 & \text{若 } x_i > 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

其中 k 為預先給定的常數。當加入上述限制條件時，平均－變異數模型會變成一個混合整數規劃問題(Mixed Integer Programming Problem)，使得在求解上變得更加的複雜，因此亦增加了問題的困難度。

二、多目標最佳化

許多決策問題所要考慮的目標可能不只一個，且目標之間又常具有衝突的特性，多目標最佳化的發展正是為了解決這些多個具有衝突特性目標的決策問題，一般稱之為多目標最佳化問題。多目標最佳化與單目標最佳化的不同點在於單目標最佳化根據單一目標函數尋找全域最佳解，多目標最佳化則需要同時滿足多個目標函數，例如投資人如何讓自己的投資組合同時可以達到報酬極大化和風險最小化等目標就屬於此類問題，因此我們可以利用多目標最佳化的方式找出報酬和風險之非凌越解(Non-Dominated Solution)。一般多目標最佳化問題以下列數學式表示：

$$\begin{aligned} \text{極小化} \quad & \vec{f}(\vec{x}) = [f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_k(\vec{x})]^T \\ \text{受限制於} \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} & \vec{x} \in \Omega \\ \text{且} \quad & \Omega = \{\vec{x} \mid g_m(\vec{x}) \leq 0, m=1, 2, \dots, M\} \end{aligned} \tag{4}$$

其中 $f_i(\vec{x})(i=1, 2, \dots, K)$ 及 $g_m(\vec{x})(m=1, 2, \dots, M)$ 是線性或非線性函數。多目標最佳化問題是在求解滿足 (M) 個限制式的條件下，極小化目標向量 $\vec{f}(\vec{x}) = [f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_k(\vec{x})]^T$ 的決策向量 $\vec{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ 。

因此，本研究所探討之多目標投資組合最佳化問題中，同時考慮極大化預期報酬和極小化風險作為無偏好之多目標投資組合模型，以 $f_1(\vec{x}) = \vec{x}^T \vec{V} \vec{x}$ 表示投資組合風險及 $f_2(\vec{x}) = \vec{p}^T \vec{x}$ 表示投資組合預期報酬，且考慮四種不同的投資情形，其模型分別敘述如下：

投資組合模型(一)：不允許賣空無基數限制

$$\begin{aligned}
 &\text{極小化 } \vec{f}(\vec{x}) = [f_1(\vec{x}), -f_2(\vec{x})] \\
 &\text{受限制於} \\
 &\quad \vec{1}^T \vec{x} = 1 \\
 &\text{且 } x_i \geq 0, \forall i
 \end{aligned} \tag{5}$$

投資組合模型(二)：不允許賣空有基數限制

$$\begin{aligned}
 &\text{極小化 } \vec{f}(\vec{x}) = [f_1(\vec{x}), -f_2(\vec{x})] \\
 &\text{受限制於} \\
 &\quad \vec{1}^T \vec{x} = 1 \\
 &\quad \vec{1}^T \vec{z} \leq k \\
 &\text{其中 } \vec{z} = [z_1, z_2, \dots, z_n]^T \text{ 及 } z_i = \begin{cases} 1 & \text{若 } x_i > 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}, \forall i \\
 &\text{且 } x_i \geq 0, \forall i
 \end{aligned} \tag{6}$$

投資組合模型(三)：允許賣空、無基數限制且投資比例有上下界限制

$$\begin{aligned}
 &\text{極小化 } \vec{f}(\vec{x}) = [f_1(\vec{x}), -f_2(\vec{x})] \\
 &\text{受限制於} \\
 &\quad \vec{1}^T \vec{x} = 1 \\
 &\text{且 } l_i \leq x_i \leq u_i, \forall i
 \end{aligned} \tag{7}$$

投資組合模型(四)：允許賣空、有基數限制且投資比例有上下界限制

$$\begin{aligned} & \text{極小化 } \vec{f}(\vec{x}) = [f_1(\vec{x}), -f_2(\vec{x})] \\ & \text{受限制於} \\ & \vec{1}^T \vec{x} = 1 \\ & \vec{1}^T \vec{z} \leq k \end{aligned} \tag{8}$$

$$\text{其中 } \vec{z} = [z_1, z_2, \dots, z_n]^T \text{ 及 } z_i = \begin{cases} 1 & \text{若 } x_i \neq 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}, \forall i$$

$$\text{且 } l_i z_i \leq x_i \leq u_i z_i, \forall i$$

三、柏拉圖最佳解集合

在多目標的最佳化問題中，最佳解往往不是只有一個，而是一組可供選擇的解集合，因為多個目標函數之間彼此存在著衝突性，單一組解通常無法達到全體目標的最佳化。在多目標的可選擇解集合中，存在著一個特性，就是在這組解集合之中，所有的選擇解，彼此在目標函數上都互有勝負關係；也就是說，沒有任何一個解，可以在全部的目標函數上都優於其他的解。這個選擇解的集合我們稱為柏拉圖最佳解集合(Pareto-Optimal Solutions)，當中的每一個解都為非凌越解，凌越概念的數學表示方式如下：

假設有兩組決策向量 $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_D)$ 及 $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_D)$ ，

1. 若 $f_i(\vec{u}) \leq f_i(\vec{v}), \forall i \in \{1, 2, \dots, K\}$ 且 $f_i(\vec{u}) < f_i(\vec{v}), \exists i \in \{1, 2, \dots, K\}$ ，則稱 \vec{u} 強

凌越(Strictly Dominate) \vec{v} ，以符號 $\vec{u} \prec \vec{v}$ 表示。

2. 若 $f_i(\vec{u}) \leq f_i(\vec{v}), \forall i \in \{1, 2, \dots, K\}$ ，則稱 \vec{u} 弱凌越(Weakly Dominate) \vec{v} ，以符號

$\vec{u} \preceq \vec{v}$ 表示。

參、多準則投資組合最佳化分析

一、背包型多目標微粒群演算法

微粒群最佳化(Particle Swarm Optimization)基於隨機多點並行的演算方式，非傳統單點循序搜尋方式，因此具有強大快速的搜尋能力，可避陷入局部最佳化(Local Optimum)，並且迭代一次可求取多個非凌越解，同時此演算法要調整的參數較少再者本研究在多目標微粒群演算法求解機制中，針對基數限制問題加入背包問題之觀念以進行求解。

(一)微粒群演算法

微粒群演算法由 Kennedy 及 Eberhart 於 1995 年所提出是一種具有群體智慧概念，屬於進化搜尋領域的一種方法，微粒群演算法與遺傳演算法類似是一種進化型的最佳化工具，首先隨機產生一組初始解當做初始族群，再以進化方式來改善此族群，最後取得最佳值。微粒群最佳化演算法與基因演算法皆是以隨機多點並行的搜尋方式求解，兩者都可避免陷入局部最佳化的情況，由於微粒群演算法所要調整的參數較少、搜尋速度快和可行性高的優點，在多數的情況下其效能都比基因演算法好(Kennedy、Eberhart 及 Shi, 2001)。因此本研究採用微粒群演算法來求解無偏好之多目標投資組合模型，此種方法只需求調整部份演算法中的參數，一次運算可產生多組非凌越解，藉由非凌越解集合，可幫助使用者能在短時間內從龐大的可行解集合中挑選出自己偏好的投資組合，並可順利解決傳統單目標求解方法所面臨的困境。

微粒群演算法的起源是來自於鳥類群體捕食的行為研究，於一個最佳化問題的解，就像是一隻在空間中飛行的鳥一樣，稱作“粒子(Particle)”，在空間中移動的所有粒子都有一個由目標函數所映射的適應值(Fitness Value)；另外，每個粒子還有一個速度來決定他們移動的方向與距離，一群粒子靠著個體本身的成功經驗與目前族群中最佳粒子的腳步在問題解的空間中飛行(Makoto *et al.*, 2007)。在微粒群最佳化演算法中，每隻鳥即為演算法中的一個粒子 x_d^i ，其中 i 代表第 i 個粒子， d 則代表粒子所搜尋的空間的維度 ($d = 1, 2, \dots, D$)，在覓食（求解）空間中，進行食物（最佳解）搜尋，所有

的鳥類透過距離食物最近的那隻鳥，可知目前距離食物有多遠。求解的過程中，最佳化函數決定了適應值，每個粒子都有一個速度值來決定它們飛翔的方向及距離。粒子不僅根據自己的最佳位置，並且依據群體經歷的最佳位置做修正，經過一段時間的學習後將會移到全域最佳解的附近。微粒群演算法的流程說明如下：

1. 初始化：初始族群中每一個粒子在 d 維空間裡的位置與速度以隨機方式產生。
2. 計算適應函數：針對所設定的目標函數，評估每一個粒子的適應函數值。
3. 尋找個體最佳解($Pbest$)：適應函數值與粒子本身的個體最佳解($Pbest$)記憶比較，更新為較佳函數值。
4. 尋找全域最佳解($Gbest$)：個體最佳解與全域最佳解($Gbest$)作比較，如個體最佳值優於全域最佳解，則修正全域最佳解。
5. 更新微粒的速度和位置：利用下列公式改變粒子的速度與位置，即

$$(v_d^i)_{new} = w \cdot v_d^i + c_1 \cdot rand \cdot ((x_d^i)^{Pbest} - x_d^i) + c_2 \cdot rand \cdot ((x_d)^{Gbest} - x_d^i) \quad (9)$$

$$(x_d^i)_{new} = x_d^i + (v_d^i)_{new} \quad (10)$$

其中 v_d^i ：微粒子 i 在 d 維度原本的速度。

$(v_d^i)_{new}$ ：微粒子 i 在 d 維度新的速度。

w ：慣性權重，介於 0.8~1.2 之間。

c_1 、 c_2 ：學習因子，介於 1~4 之間。

$(x_d^i)^{Pbest}$ ：粒子 i 在 d 維度本身的個體最佳解。

$(x_d)^{Gbest}$ ：為第 d 個維度的全域最佳解。

$rand$ ：介於 0 與 1 的隨機亂數。

6. 若滿足終止條件，則停止。否則，回到步驟 2，繼續執行演算法，終止條件通常為達到最大迭代次數。

在(9)式及(10)式的粒子速度及位置更新方法稱為慣性權重法(Inertia Weight Method)，是 Shi 及 Eberhart (1998) 提出的更新法則，慣性權重可使粒子保持運動的慣性，使其有擴展搜索空間的趨勢，我們可以將微粒群演算法的流程以圖 1 表示：

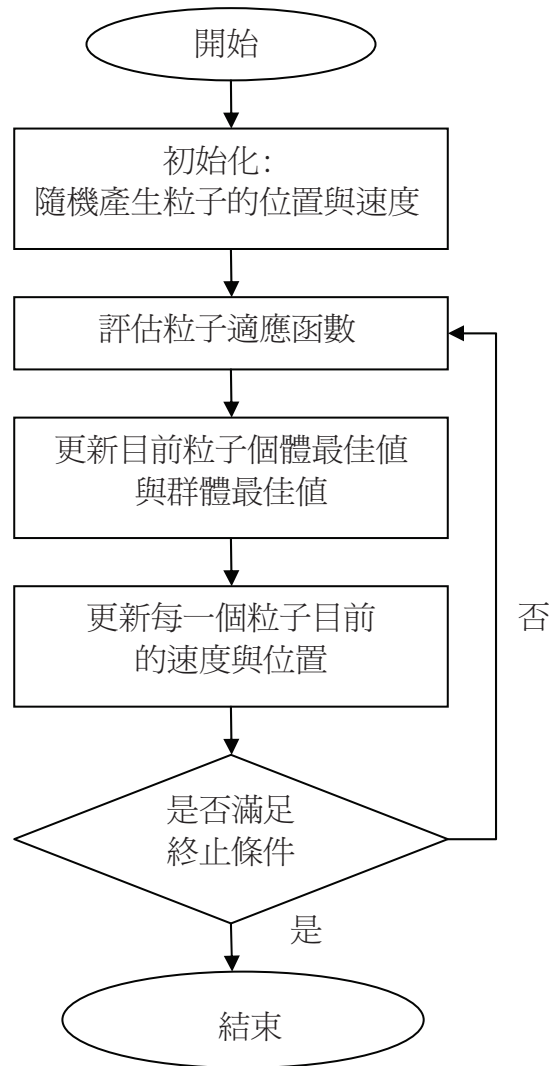


圖 1 微粒群最佳化演算法之演算流程

(二) K-MOPSO 求解無偏好之多目標投資組合模型

針對(5)式至(8)式投資組合模型應用多目標微粒群演法進行求解，由於其中兩個模式有基數限制條件，因此將背包問題的觀念加入求解過程中。所謂背包問題是作業研究領域中相當著名的問題，該問題敘述登山者擁有一個背包，以及多個可供選擇之項目，雖然每一個項目可以為登山者帶來效用，但同時亦將佔用背包空間。因此，如何在背包容量限制下選擇某些

項目，並為登山者帶來最大效用，即為背包問題所探討之主題。背包問題在企業管理方面之應用相當廣泛，例如：投資組合選擇問題、計畫排程問題(Projects Scheduling)以及資本預算問題(Capital Budgeting)。K-MOPSO 的執行步驟如下，圖 2 為其流程：

1. 首先設定迭代次數(T)、粒子數(N)、決策向量的維度(D)（在此為報酬及風險兩個維度）、儲存非凌越解的陣列 \tilde{A} 。
2. 隨機產生無基數限制(UCC)下 N 個粒子的初始位置 \vec{x}_n^D 與初始速度 \vec{v}_n^D ，此時個體的最佳解 \vec{p}_n^D 亦為粒子的初始位置 \vec{x}_n^D ，即 $\vec{p}_n^D = \vec{x}_n^D$ ，並計算 UCC 粒子目標向量，更新 UCC-archive、UCC^{Pbest} 及 UCC^{Gbest}。
3. 針對各資產平均報酬率除以報酬標準差之高低，產生符合 n 取 k 基數限制的位元遮罩變數。
4. 針對各粒子依遮罩變數值計算符合基數限制(CC)的粒子位置。
5. 針對各粒子計算 CC 粒子目標向量，更新 CC-archive（無需計算 CCP^{best} 及 CCG^{best}）。
6. 針對各粒子 UCC 粒子，利用 UCC^{Pbest} 及 UCC^{Gbest} 依正常微粒群演算法邏輯飛行，計算 UCC 粒子目標向量，更新 UCC-archive、UCC^{Pbest} 及 UCC^{Gbest}，並回到步驟 2。
7. 演算法持續執行到最大迭代次數後(T)，輸出 CC-archive，即為非凌越解陣列 \tilde{A} 。

本研究以 Microsoft Windows 為作業平台來設計交談式使用者介面，系統採用 Borland C++ Builder 6.0 做為開發平台，採用 VCL（Visual Component Library，視覺化元件庫）核心做為功能開發元件，C++ 語言具有程式碼精簡、執行效率高、可移植性強且具有物件導向設計架構等等特性，而 Borland C++ Builder 開發工具提供快速地建立具有交談式介面的應用程式。

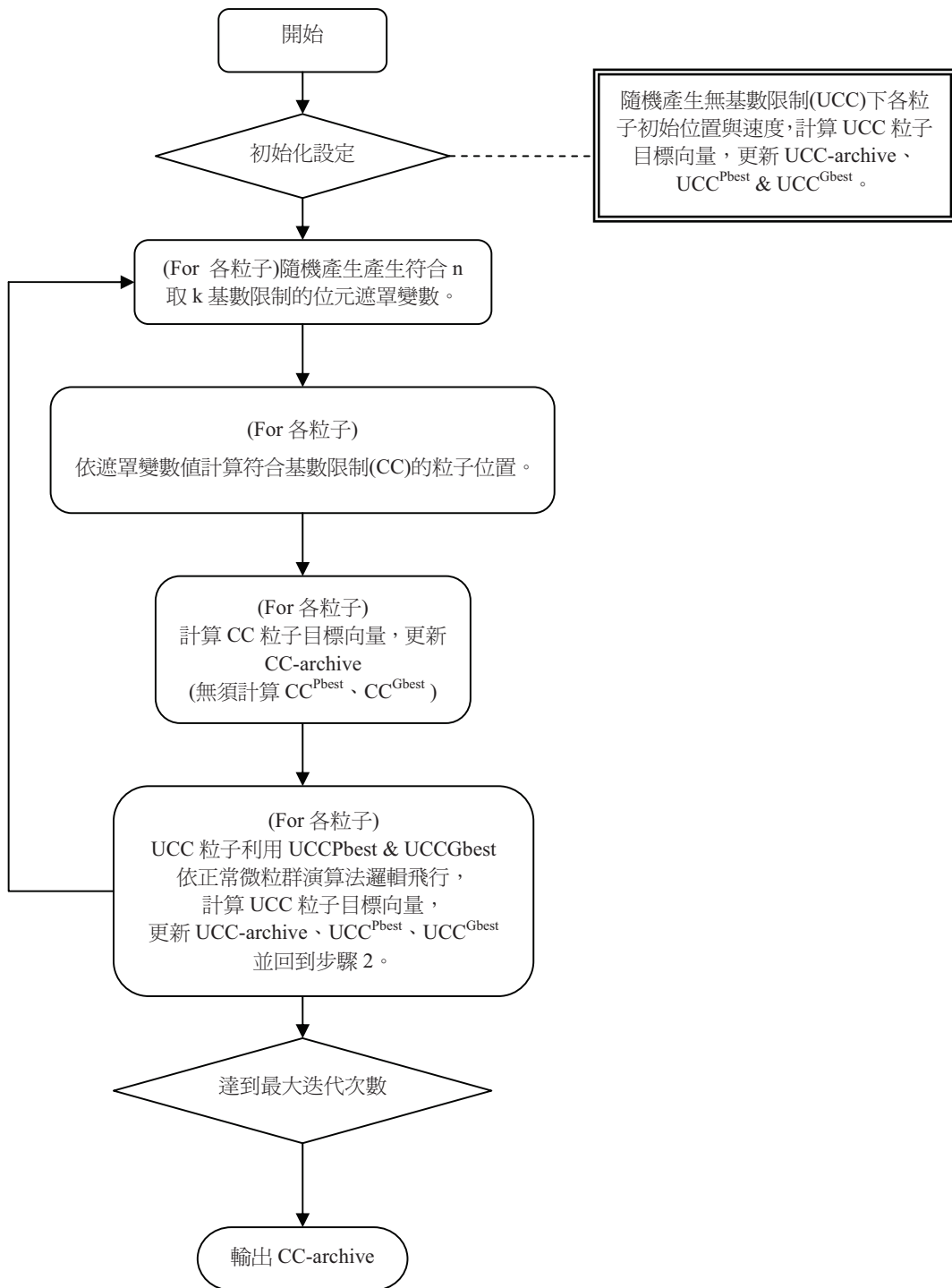


圖 2 K-MOPSO 流程

二、多屬性決策分析

在目前的社會中，在做決策時已不能只從單一屬性或是標準來決定，而是要考慮相關各層面的因素，以符合實際問題的需求，且在決策領域中，所面臨的問題經常包含多重評估屬性，而這些屬性卻往往彼此之間都是互相衝突的。多屬性決策方法，正是因應此需求，被應用來解決上述所具有多屬性、多衝突的問題。

決策的制訂是從眾多的可能選擇方案中，選擇一個可能方案的過程，而幾乎所有多屬性決策方法常被使用在「選擇」或「評估」方案層面的問題。Hwang及Yoon(1981)認為多屬性決策方法為決策者在多個質化或量化的評估準則下，對一組有限、可數且數目不大的已知可行替代方案進行評估，針對各替代方案之優劣進行排序，然而這些方案下的各個屬性的評估值不一定是量化的數值。不過，最終多屬性決策方法還是必須將不是量化的評估值轉化為數量化的評估值才能進行分析(Buede 及 Maxwell, 1995)，而其最終方案的選擇是經由各評估屬性相互之間，和各方案同一評估屬性內相互比較而得來的。

多屬性決策方法是在一個有限集合中，就備選方案中的特質萃取屬性，基於決策者的偏好，分別進行評比後，了解各方案的優劣，而在集合內選擇較優者。在多屬性決策方法中，TOPSIS法是由Hwang及Yoon於1981年所發展出來的一種多屬性評估方法，係改進Zeleny(1974)的妥協解距離理想解最近的概念而成之技術。學者們認為TOPSIS是當我們選擇一個方案時，必須根據各屬性所建立的 n 維空間裡的所有方案裡有與正理想解產生最短的距離和負理想解產生最遠的距離。因此，其基本觀念乃在於先界定正理想解(Positive Ideal Solution, PIS)與負理想解(Negative Ideal Solution, NIS)。所謂正理想解是各屬性下的各備選方案最佳值之集合(利益屬性值最大者；成本屬性值最小者)；負理想解正好相反，是各屬性下的各備選方案最差值之集合(利益屬性值最小者；成本屬性值最大者)，被選擇的方案應是距正理想解最近，且距負理想解最遠。TOPSIS方法有六個主要步驟：

1. 計算正規化評估值

其向量正規化計算公式如下：

$$r_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m x_{ij}^2}} \quad i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n \quad (11)$$

其中 x_{ij} 為第 i 個方案在第 j 屬性之原始評估值。

2. 計算加權後正規化評估值

$$v_{ij} = w_j r_{ij} \quad i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n \quad (12)$$

其中 w_j 為第 j 屬性的權重值。

3. 決定正理想解 A^* 與負理想解 A^-

$$\begin{aligned} A^* &= \{v_1^*, v_2^*, \dots, v_j^*, \dots, v_n^*\} \\ &= \left\{ \left(\max_i v_{ij} \mid j \in J_1 \right), \left(\min_i v_{ij} \mid j \in J_2 \right) \mid i=1, \dots, m \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} A^- &= \{v_1^-, v_2^-, \dots, v_j^-, \dots, v_n^-\} \\ &= \left\{ \left(\min_i v_{ij} \mid j \in J_1 \right), \left(\max_i v_{ij} \mid j \in J_2 \right) \mid i=1, \dots, m \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

其中 J_1 為一效益屬性的集合，且 J_2 為一成本屬性的集合。

4. 計算各替代方案的正理想解與負理想解的歐氏距離

(1) 正理想解的歐氏距離

$$S_i^* = \sqrt{\sum_{j=1}^n (v_{ij} - v_j^*)^2} \quad i=1,2,\dots,m \quad (15)$$

(2) 負理想解的歐氏距離

$$S_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^n (v_{ij} - v_j^-)^2} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (16)$$

5. 計算各替代方法對正理想解的相對近似度

計算公式如下：

$$C_i^* = \frac{S_i^-}{(S_i^* + S_i^-)} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (17)$$

其中 $0 \leq C_i^* \leq 1$ ，當 C_i^* 值約接近 1，則其方案與正理想解 A^* 越接近。

6. 按照 C_i^* 值大小排定方案之優劣順序，其值越大者，方案的偏好程度越高。

利用 Yoon 及 Hwang (1995) 所提出之 TOPSIS 法進行步驟求算各投資組合之評估結果，其進行步驟如下：

1. 首先本研究必須建立出投資組合方案和各個決策屬性，並且給與屬性各別對投資組合方案影響的重要程度，也就是指派屬性的權重 $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ 。
2. 轉化正規化評估值，如(11)式。
3. 計算加權後正規化評估值，如(12)式。
4. 決定理想解與負理想解，如(13)、(14)式。
5. 計算各替代投資組合方案的正理想解與負理想解的歐氏距離，如(15)、(16)式。
6. 計算各替代投資組合方法對正理想解的相對近似度 C_i^* ，如(17)式。
7. 按照 C_i^* 值大小排定各投資組合方案之優劣順序。

肆、多準則投資組合之實例驗證

針對無偏好之多目標投資組合模型(5)至(8)式，以 K-MOPSO 進行最佳解的運算，再根據各組投資組合之預期報酬、風險資料，以 TOPSIS 法進行多屬性決策評估。

一、樣本資料

本研究就投資人熱中之美國股市新興產業-資訊科技業、醫療檢測儀器業與金融服務業等，選取 IBM (IBM)、Microsoft (MSFT)、Apple (AAPL)、Quest

Diagnostics (DGX)、Bank of America (BAC) 共 5 支股票進行分析，樣本期間為 2002/3/2-2007/2/1，並依據歷史股票資料計算各支股票的預期報酬、變異數及 Sharpe 指標如下表(Duan, 2007)，以求解最佳投資組合。

表 1 樣本資料

股票名稱	預期報酬	變異數	Sharpe 指標	Sharpe 指標 排序
IBM	0.400%	0.6461000%	0.049763409	4
MSFT	0.513%	0.3900000%	0.025976765	5
AAPL	4.085%	1.2677780%	0.362802655	1
DGX	1.006%	0.5598361%	0.134452094	3
BAC	1.236%	0.1622897%	0.306812176	2

二、不允許賣空條件

Markowitz 投資組合理論中的平均－變異數模型，假設投資組合中各投資標的之權重都為正數，或是至少不小於零。在最佳化的問題中，這個假設是對投資標的設定非負性限制，意味著不得對於投資組合中的投資標的進行融券賣空（或融資買空）之行為，亦即當投資者看跌（或看漲）某支股票價格時，不能從經紀人手中借入該股票拋出（或借資購入該股票）。

本研究中不允許賣空之投資組合模型，分為無基數限制與基數限制。在無偏好之多目標投資組合模型，以(5)、(6)式分別表示不允許賣空下無基數限制與基數限制之模型，以 K-MOPSO 進行求解。

(一) 無基數限制

本節運用 K-MOPSO 在不允許賣空無基數限制投資條件下求解最佳投資組合，所謂無基數限制設定，亦即投資者對於買入投資標的總額沒有限定門檻限制。針對無偏好之多目標投資組合模型(一)之(5)式應用 K-MOPSO 求解

最佳投資組合。演算法參數設定：最大允許非凌越數量為 100、群體大小為 100，迭代次數為 100 次，位元遮罩變數選取條件為隨機選取，得到的非凌越解為 96 組，並將非凌越解以報酬和風險作遞減排序，以每 10 組中取其第一組作為代表，共有 10 組，所得結果列於下表 2。

表 2 K-MOPSO 求解 5 支股票之無偏好之多目標投資組合模型(一)

粒子編號	投資組合之預期報酬	投資組合之風險	IBM	MSFT	AAPL	DGX	BAC
83	3.9998%	1.2010%	0	0	0.970088	0	0.029912
63	3.7871%	1.0435%	0	0	0.895451	0	0.104549
91	3.5713%	0.8968%	0	0	0.819675	0	0.180325
16	3.3572%	0.7645%	0	0	0.744526	0	0.255474
93	3.1427%	0.6451%	0	4.03E-06	0.669249	0	0.330747
17	2.9291%	0.5393%	0	0	0.594292	0	0.405708
66	2.7151%	0.4464%	0	0	0.519175	0	0.480825
69	2.4789%	0.3590%	0	0	0.436264	1.33E-05	0.563722
35	2.2224%	0.2822%	0	0	0.346229	5.99E-06	0.653765
95	1.8366%	0.2022%	0	6.91E-07	0.210808	0	0.789191

從上表中 K-MOPSO 求解多目標投資組合模型(一)求解結果，可顯示投資者在這 5 項投資標的中，主要是投資 AAPL 與 BAC 這兩支股票，其餘三支股票的投資比例非常微小，而其中在投資組合上至多包含 3 支股票，對於投資者而言，若選擇 AAPL 股票投資比重愈大者，所得期望報酬愈大且風險也會變得愈大。

(二) 基數限制

由於基數的限制設定不可超過無基數限制下所求解出投資組合中包含最多投資標的總額，本研究於基數限制中，資料集設定的基數限制為 2 與 3，本小節中針對無偏好之多目標投資組合模型(二)之(6)式應用 K-MOPSO 求解投資組合最佳解。參數設定方面：最大允許非凌越數量為 100、位元遮罩變數選取條件為隨機選取、群體大小為 100，迭代次數為 100 次；基數限制為 2 時，得到的非凌越解共有 106 組；基數限制為 3 時，得到的非凌越解共

有 104 組，並將非凌越解以報酬和風險作遞減排序，以每 10 組中取其第一組作為代表，最後不足 10 組的部分再取一組為代表，共可各得 11 組非凌越解，表 3、表 4 分別呈現 K-MOPSO 求解 5 取 2、5 取 3 支股票之無偏好多目標投資組合模型(二)的非凌越解。

表 3 K-MOPSO 求解 5 取 2 支股票之無偏好之多目標投資組合模型(二)

粒子編號	投資組合之預期報酬	投資組合之風險	IBM	MSFT	AAPL	DGX	BAC
44	4.0351%	1.2315%	0	0	0.983786	0.016214	0
18	3.7891%	1.0449%	0	0	0.896136	0	0.103864
41	3.5627%	0.8913%	0	0	0.816665	0	0.183335
55	3.3240%	0.7452%	0	0	0.732894	0	0.267106
5	3.1110%	0.6286%	0	0	0.658111	0	0.341889
51	2.8864%	0.5197%	0	0	0.579287	0	0.420713
6	2.6162%	0.4079%	0	0	0.484456	0	0.515544
53	2.3418%	0.3156%	0	0	0.388127	0	0.611873
90	2.0425%	0.2396%	0	0	0.283078	0	0.716922
102	1.8218%	0.1999%	0	0	0.205618	0	0.794382
89	1.5909%	0.1734%	0	0	0.12457	0	0.87543

表 4 K-MOPSO 求解 5 取 3 支股票之無偏好之多目標投資組合模型(二)

粒子編號	投資組合之預期報酬	投資組合之風險	IBM	MSFT	AAPL	DGX	BAC
75	4.0694%	1.2554%	3.00E-05	0	0.994542	0	0.005428
62	3.8479%	1.0872%	0	0	0.916787	0	0.083213
57	3.6261%	0.9328%	0	0	0.83894	0	0.16106
59	3.3922%	0.7853%	6.03E-06	0	0.756842	0	0.243152
77	3.1430%	0.6453%	0	0	0.669347	0	0.330653
17	2.9306%	0.5400%	0	0	0.594803	0	0.405197
51	2.6821%	0.4332%	0	0	0.507568	0	0.492432
42	2.3794%	0.3270%	0	0	0.401345	0	0.598655
94	2.0552%	0.2423%	0	0	0.287527	0	0.712473
83	1.7805%	0.1941%	0	0	0.191103	0	0.808897
100	1.5751%	0.1721%	0	0	0.119037	1.31E-05	0.88095

從表 3 與表 4 可觀察投資者將較多資金投入於擁有較高 Sharpe 指標的 AAPL、BAC 股票，對於其他投資標的投入資金非常微小，其此結果與表中 K-MOPSO 求解無偏好之多目標投資組合模型(一)之結果非常類似，都是將投資比例集中於 AAPL 股票與 BAC 股票，在不允許賣空的情況下，受到基數限制而改變投資組合配置之影響非常微弱。

綜合上述，從表 2、表 3 及表 4 可以觀察出 K-MOPSO 求解投資組合模型(一)、(二)之投資組合配置，均較集中於 AAPL 股票與 BAC 股票，僅是百分比比重上的不同而已，因此在投資組合之報酬與風險的變化程度上，並無明顯的變化，故由 K-MOPSO 所求解投資組合模型(一)、(二)之非凌越解所構成的效率前緣圖幾乎為重疊的情況。

三、允許賣空條件

本研究中允許賣空投資組合模型，可分為無基數限制與基數限制。在無偏好之投資組合模型中，以(7)、(8)式分別為允許賣空無基數限制與基數限制之模型，利用 K-MOPSO 進行求解。由於 K-MOPSO 求解允許賣空下之投資組合，如沒有設定決策變數上下限範圍，即會造成無界解的情況發生，所以就實務上的角度，本研究分別作為 K-MOPSO 求解允許賣空下之投資組合(三)與(四)中投資比例上下限之範圍設定。

(一)無基數限制

本小節中為無偏好之多目標投資組合模型(三)之(7)式應用 K-MOPSO 求解投資組合最佳配置。演算法參數設定：最大允許非凌越數量為 100、群體大小為 300，迭代次數為 100、位元遮罩變數選取條件為隨機選取，決策變數範圍設定介於 -67 至 138，得到的非凌越解為 102 組，並將非凌越解以報酬和風險作遞減排序，以每 10 組中取其第一組作為代表，共有 11 組。表 5 呈現 K-MOPSO 求解 5 支股票中之無偏好之多目標投資組合模型(三)中 11 組非凌越解。

表 5 K-MOPSO 求解 5 支股票無偏好之多目標投資組合模型(三)

粒子編號	投資組合之預期報酬	投資組合之風險	IBM	MSFT	AAPL	DGX	BAC
29	509.0535%	28091.8864%	-67	-67	136.1722	-67	65.82785
39	476.5291%	25017.2290%	-67	-67	124.9187	-64.9855	75.06681
36	438.4580%	22126.7963%	-67	-67	111.3931	-67	90.60688
86	396.4968%	19256.8307%	-67	-67	96.66471	-67	105.3353
16	357.3205%	16172.9501%	-55.999	-67	86.14191	-67	104.8571
79	321.8622%	13253.8285%	-39.1894	-67	78.62858	-67	95.56082
41	290.0969%	11366.1600%	-32.3142	-67	69.49639	-67	97.81783
48	253.8140%	9831.7442%	-30.5688	-67	57.27326	-67	108.2955
60	223.9588%	8248.0062%	-20.4329	-67	49.7683	-67	105.6646
54	180.5715%	7130.9794%	-19.0429	-67	34.94722	-67	119.0957
59	104.5254%	4919.8675%	1.496672	-67	14.28207	-67	119.2213

此小節呈現 K-MOPSO 求解投資組合模型(三)-5 支股票之結果，從表 5 中可觀察出投資者會利用 Sharpe 值較高的 AAPL、BAC 股票進行融資買空，以 Sharpe 值較低的 IBM、MSFT、DGX 股票從事融券賣空。

(二) 基數限制

本小節中為無偏好之多目標投資組合模型(四)之(8)式應用 K-MOPSO 求解投資組合最佳解。演算法參數設定：最大允許非凌越數量為 100、群體大小為 300，迭代次數為 100 次、位元遮罩變數選取條件為隨機選取。基數限制為 2 時，決策變數範圍設定介於 -127 至 128，得到之非凌越解為 94 組；基數限制為 3 時，決策變數範圍設定介於 -106 至 138，得到之非凌越解為 110 組，並分別以報酬和風險作遞減排序，以每 10 組中取其第一組作為代表。表 6、表 7 分別呈現 K-MOPSO 求解 5 取 2、5 取 3 支股票之無偏好之多目標投資組合模型(四)的非凌越解。

表 6 K-MOPSO 求解 5 取 2 支股票之投資組合模型(四)

粒子編號	投資組合之預期報酬	投資組合之風險	IBM	MSFT	AAPL	DGX	BAC
2	468.3950%	23168.9490%	-126	0	127	0	0
29	292.5701%	9006.0906%	-78.2863	0	79.28632	0	0
1	240.2490%	6059.9657%	-64.0879	0	65.08792	0	0
45	195.7263%	4011.1192%	-52.0058	0	53.00579	0	0
56	172.0941%	3094.7540%	-45.5927	0	46.5927	0	0
62	153.8627%	2468.9109%	-40.6452	0	41.64523	0	0
25	135.0235%	1896.4126%	-35.5328	0	36.53283	0	0
8	107.9001%	1204.6376%	-28.1723	0	29.17235	0	0
86	82.2529%	694.3244%	-21.2125	0	22.21247	0	0
77	53.1124%	284.1473%	-13.3046	0	14.30458	0	0

表 7 K-MOPSO 求解 5 取 3 支股票之投資組合模型(四)

粒子編號	投資組合之預期報酬	投資組合之風險	IBM	MSFT	AAPL	DGX	BAC
76	488.6812%	24717.4152%	-47.9644	-86.1835	135.1479	0	0
42	344.2945%	13462.3003%	0	-51.1516	103.3032	-51.1516	0
44	263.7774%	7887.2406%	0	-39.0456	79.09122	-39.0456	0
20	132.3985%	2000.8227%	0	-37.0201	36.7462	1.273898	0
81	60.9565%	443.8401%	0	-18.6857	16.47888	3.206815	0
19	42.5352%	198.3401%	0	-11.0812	11.71359	0.367634	0
28	30.4864%	99.8202%	0	-7.65927	8.348287	0.310983	0
27	23.7187%	58.7090%	0	-5.58745	6.482008	0.105446	0
35	18.6548%	35.4344%	0	-4.17901	5.062872	0.116139	0
64	13.6589%	18.4766%	0	-2.93426	3.639599	0.294661	0
73	9.7180%	9.4354%	0	-2.18663	2.479373	0.707261	0

從上述表 6 與表 7 可觀察出，當允許賣空且基數限制為 2 時，其 K-MOPSO 主要是以投資標的之 Sharpe 指標最高者與最低者，來建構投資組合配置；基數限制為 3 時，則投資組合則是以 Sharpe 指標分別排名為 1、3、5 的 AAPL、DGX 及 MSFT 等三支股票來配置投資組合。針對允許賣空的情況下，綜合表 5、表 6 與表 7，可發現到在無基數限制下，所得到的期望報酬與風險，均會比有基數限制的條件下所得到的值還來的大。

綜合上述「不允許賣空」與「允許賣空」的兩種情況，在「不允許賣空」的條件下，期望報酬與風險的變化比較小，而在「允許賣空」的投資條件下，雖然可使投資組合之預期報酬以倍數地成長，但經由實驗結果顯示，其投資組合之風險成長倍數超過其預期報酬成長倍數，故對於風險容忍程度較低之投資者，不建議採用此方法賺取超額報酬。

四、多屬性決策分析

本節為投資組合問題運用多屬性決策分析進行實例驗證，在實驗過程中擷取了二項代表投資組合績效表現之資料，分別為預期報酬、風險，作為多屬性評估方法中 TOPSIS 排序法之評估屬性，來進行投資組合績效分數之計算與排序。在此節中以 K-MOPSO 求解投資組合模型(三)之結果中前 20 組非凌越解進行多屬性決策分析，而屬性對於方案影響之權重設定為本研究自行設定，其投資人可依據自己的偏好來設定不同的權重比例，在本研究中屬性權重總和為 1，其屬性權重的間距以 0.1 為增加或減少，表 8 為投資組合的基本資料。

表 8 投資組合績效評估

投資組合代碼	投資組合之預期報酬	投資組合之風險
1	509.0535%	28091.8864%
2	506.4986%	27851.1422%
3	503.7153%	27561.2424%
4	501.0304%	27342.1458%
5	494.8274%	26775.1168%
6	492.0809%	26527.5668%
7	490.0441%	26345.3826%
8	484.9205%	25892.3302%
9	481.4328%	25588.2326%
10	479.2741%	25401.7512%
11	476.5291%	25017.2290%
12	473.2151%	24885.4713%
13	469.4045%	24566.1524%
14	461.6229%	23883.3837%
15	458.6714%	23661.6631%
16	455.5256%	23305.4818%
17	451.8213%	23146.5468%
18	447.9335%	22844.6019%
19	443.7587%	22525.1805%
20	440.8697%	22307.0534%

TOPSIS 法選擇一個方案時，必須根據各屬性所建立所有方案裡有與正理想解產生最短的距離和負理想解產生最遠的距離，以(17)式計算各替代方法對正理想解的相對近似度，計算結果如下所示：

表 9 各投資組合與正理想解之相對近似度
(預期報酬權重為 0.1、風險權重為 0.9)

投資組合代碼	投資組合與正理想解之相對近似度
1	0.064861593
2	0.075859166
3	0.109607388
4	0.141381513
5	0.232599756
6	0.27397144
7	0.304691174
8	0.381669728
9	0.433606229
10	0.465509086
11	0.531462419
12	0.553890477
13	0.608485431
14	0.724519725
15	0.76166333
16	0.820549035
17	0.845386859
18	0.890269314
19	0.926465853
20	0.935138407

接下來，按照與正理想解之相對近似度值大小排定方案之優劣順序，如下表所示：

表 10 各權重下之最佳投資組合績效

投資組合之 預期報酬權重	投資組合之 風險權重	最佳投資組合績效 (投資組合代碼表示)	投資組合與正理想解 之相對近似度
0.1	0.9	20	0.935138407
0.2	0.8	20	0.865006299
0.3	0.7	20	0.788934064
0.4	0.6	19	0.706251991
0.5	0.5	16	0.617340483
0.6	0.4	16	0.530015483
0.7	0.3	3	0.595145872
0.8	0.2	1	0.714038572
0.9	0.1	1	0.848901378

經由TOPSIS法評估之後，從上表10可顯示出當投資組合預期報酬和風險權重分別為0.1與0.9時，最佳投資組合績效皆為投資組合代碼20，故建議投資者在允許賣空之投資組合模型下，賣空IBM、MSFT、DGX等三支股票，其比例皆為-67，以及融資AAPL、BAC等二支股票，比例分別為112.2396、89.76，所得期望報酬為440.8697%且投資風險為22307.0534%；相對於權重分別0.9與0.1，為投資組合代碼1之績效表現最好，為賣空IBM、MSFT、DGX等三支股票，其比例分別皆為-67，以及融資AAPL、BAC等兩支股票，比例分別為136.1722、65.83，所得期望報酬為509.0535%且投資風險為28091.8864%。另外，可從表10可觀察出當投資者對於預期報酬權重偏好較高時，會追求擁有較高報酬高風險之投資組合，並推測投資者對於投資組合的風險容忍程度亦較高；而當投資者對於風險偏好權重較高時，投資者會追求較低預期報酬與風險之投資組合，故對於風險的容忍程度亦較低。

伍、結論

在過去處理傳統平均-變異數的投資組合模型中，大多數是假設投資人只能擁有單一目標，即在要求之報酬水準之下極小化風險，或是在要求某一風險水準下，極大化期望報酬，或者是將具有衝突性的目標合併為單一

目標的形式，並以單目標最佳化的技術來進行求解，這對於極端風險追求者可能無法提供適切的投資組合。因此，本研究在四種不同投資組合模型下，利用兩階段多準則決策分析法來找尋最佳投資組合。首先，利用多目標最佳化 K-MOPSO 方法處理較複雜的平均－變異數模型，同時再考慮極大化報酬與極小化風險雙目標下，找出合適的投資組合效率前緣，文中並以柏拉圖最佳化的方式求得投資組合中各投資標的之投資比例，提供給投資人作為投資參考的依據。其次，再由多屬性決策分析 TOPSIS 法建議最適投資組合，研究中發現若投資者對於預期報酬權重偏好較高時，會追求擁有較高報酬高風險之投資組合，並推測投資者對於投資組合的風險容忍程度亦會較高；而當投資者對於風險偏好權重較高時，投資者會追求較低預期報酬與風險之投資組合。最後，從實務的角度而言，決策者在選擇最適投資組合時，可先從多目標角度來找尋更廣的效率前緣，然後再依個人對於風險的喜好來找尋自己的最佳組合。

參考文獻

1. Buede, D. M. and D. T. Maxwell (1995), "Rank Disagreement: A Comparison of Multi-Criteria Methodologies." *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, Vol. 4, No. 1, pp.1-21.
2. Chang, T. J., N. Meade, J. E. Beasley, and Y. M. Sharaiha (2000), "Heuristics for Cardinality Constrained Portfolio Optimisation." *Computers & Operations Research*, Vol. 27, No. 13, pp.1271-1302.
3. Clark, J. J., T. J. Hindelang, and R. E. Pritchard (1989), *Capital Budgeting : Planning and Control of Capital Expenditures*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 3rd edition.
4. Duan, Y. (2007), "A Multi-objective Approach to Portfolio Optimization." *Rose-Hulman Undergraduate Math Journal*, Vol. 8, No. 1, pp.1-18.
5. Ehrgott M., K. Klamroth, and C. Schwehm (2004), "An MCDM Approach to Portfolio Optimization." *European Journal of Operational Research*, Vol. 155, No. 3, pp.752-770.
6. Elton, E. J., M. J. Gruber, S. J. Brown, and W. Goetzmann (2002), *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*. John Wiley, New York, 6th edition.
7. Hwang, C. L. and K. Yoon (1981), *Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications*, Springer, Berlin.
8. Kennedy, J. and R. C. Eberhart (1995), "Particle Swarm Optimization." *Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks*, Piscataway, NJ, Seoul, Korea, Vol. 4, pp.1942-1948.
9. Kennedy, J., R. C. Eberhart, and Y. Shi (2001), *Swarm Intelligence*, San Francisco: Morgan Kaufmann.
10. Kendall, G. and Y. Su (2005), Particle Swarm Optimisation Approach in the Construction of Optimal Risky Portfolios, Proceedings of the 23rd IASTED International Multi-Conference Artificial Intelligence and Applications Innsbruck.
11. Makoto K., M. Hiroaki, and K. Haruhiko (2007), "Improved Particle Swarm Optimization and Application to Portfolio Selection." *Electronics and Communications in Japan*, Part 3, Vol. 90, No. 3, pp.13-25.
12. Markowitz, H. (1952), "Portfolio Selection", *Journal of Finance*, Vol. 7, No. 1, pp.77-91.
13. Nemhauser, G. L. and Z. Ullmann (1969), "Discrete Dynamic Programming and Capital Allocation." *Management Science*, Vol. 15, No. 9 , pp.494-505.
14. Shi, Y. and R. C. Eberhart (1998), "A Modified Particle Swarm Optimizer." Proceedings of IEEE International Conference of Evolutionary Computation", Anchorage, Alaska, pp.69-73.
15. Subbu, R., P. Bonissone, N. Eklund, S. Bollapragada, and K. Chalermkraivuth (2005), "Multiobjective Financial Portfolio Design: A Hybrid Evolutionary Approach." In IEEE Congress on Evolutionary Computation

nary Computation.

16. Yoon, K. P. and C. L. Hwang (1995), "Multiple Attribute Decision Making: An Introduction." Sage Publications.
17. Zeleny, M. (1974), "A Concept of Compromise Solutions and the Method of the Displaced Ideal." *Computers & Operations Research*, Vol. 1, No. 4, pp.479-496.

Multi-criteria Portfolio Optimization Analysis by Combining K-MOPSO with TOPSIS

Chin-Hsiung Hsu¹, Ching-Shih Tsou²

(Received: October 6, 2008; First Revised: January 10, 2009; Accepted: March 18, 2009)

Abstract

The allocation of limited capital to a variety of assets available is one of the important problems in financial management. It is actually a constrained multi-objective optimization problem called portfolio selection. Most studies have been made to solve the problem with single-objective optimization techniques by aggregating conflicting and incommensurate objectives into a single one. The solutions obtained may be unsatisfactory because their non-dominance is not guaranteed, especially when some practical constraints, such as cardinality constraints, are incorporated into the portfolio optimization models. This paper presents an evolutionary multi-objective optimization technique, which called Knapsack Multi-Objective Particle Swarm Optimization (K-MOPSO) to generate the efficient portfolios in terms of expected return and variance under short sales and/or cardinality constraints. Finally, a Multi-Attribute Decision Making (MADM) method named Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution (TOPSIS) is employed to outrank the efficient portfolio that decision makers satisfy most.

Keywords: Portfolio 、 Multi-Objective Optimization 、 Knapsack Multi-objective Particle Swarm Optimization 、 Multi-Attribute Decision Making Method

1. Department of Financial Engineering and Actuarial Mathematics, Soochow University, 10048 Taipei, Taiwan, R.O.C.

2. Department of Business Administration, National Taipei College of Business, 10051 Taipei, Taiwan, R.O.C.
