東吳經濟商學學報　第七十期
（民國九十九年九月）：29-56.

不同風險衡量下效率投資組合之比較分析

許晉雄*　鄒慶士**　葉柏緯***

摘　要

傳統投資組合理論主要的是以變異數來衡量風險，而其中又以 Markowitz (1952)提出的平均數-變異數投資組合模型最為著名，在此模型中，由於共變異數矩陣的計算上較為困難且複雜，因此，Konno 及 Yamazaki(1991)另外提出了平均數-平均絕對離差模型，此模型不但節省了計算時間，並且在求解最適投資組合時，也不需要共變異數矩陣，所以降低了計算上的困難度。除此之外，亦有許多學者分別提出不同的風險測量方式，如Markowitz(1959)提出了半變異數(semivariance)的觀念，而Estrada(2008)即以此半變異數為損失風險的觀念發展出一種較簡易的平均數-半變異數模型；其次，Bawa及Lindenberg(1977)以左偏動差(lower partial moment)做為損失風險的觀念而發展出平均數-左偏動差模型；另外，Rockafellar 及 Uryasev(2000)則以條件風險值(conditional value-at-risk)為損失風險的觀念發展出平均數-條件風險值模型。綜觀上述不同風險測量之投資組合模型，本研究以半變異數、左偏動差、平均絕對離差、條件風險值來衡量投資組合的風險，與利用變異數來衡量風險作比較，分析其所求解出的最適投資組合之差異與進行相似度分析，文中發現在樣本內資料分析部分，

* 東吳大學財務工程與精算數學系副教授
** 國立台北商業技術學院企業管理系教授
*** 國立台北商業技術學院商學研究所碩士

MLPM 與 MSV 之間的相似度指數位居第一，而 MV 與 MMAD 之間的相似度指數較高。

關鍵詞：左偏動差、半變異數、絕對離差、條件風險值、投資組合績效

壹、緒論

近年來隨著金融商品多樣化，無論對一般或專業投資人，投資的管道也愈來愈多元性，其中股票更是投資人最常運用的理財工具之一。然而許多投資人在投資股票的時候，往往過度專注於某一支股票報酬率的高低，而忽略了高報酬必伴隨著高風險以及分散投資標的可為其降低投資風險的事實。自從 Markowitz 提出了平均數-變異數投資組合模型（mean-variance portfolio model，簡稱MV模型）後，便開創了投資組合的理論，也為上述的事實提出了合理的解釋方法。但是以傳統投資組合的變異數來衡量風險時，其所分析出來結果尚有缺失。因此，傳統以變異數（標準差）來衡量風險的方式，對於股市或其他金融商品的投資應用上不盡然合理。然而，現今不論是在財務研究議題上或是在實務上對投資者而言，變異數或標準差是廣為被一般大眾所使用的風險衡量方式(Evans, 2004)，但變異數或標準差並非唯一的風險衡量方式，在許多投資組合的相關文獻中，也有提供一些具有成效的風險衡量方式，例如：半變異數、左偏動差、平均絕對離差、風險值、條件風險值等(Lee, 2007)。

在傳統的Markowitz的理論架構下，風險的衡量往往是以變異數或標準差為主，此模式的概念是給予資產報酬的上方增值潛力與下方損失風險相等的重視，這與我們現實生活中，資產的下方風險才是投資人所關切的情形並不符合。所以Markowitz(1959)即針對此不合理現象作了修正，於是提出了半變異數（semivariance，簡稱 SV）的觀念，他指出以半變異數為基礎所尋找出來的投資組合優於以變異數為基礎的尋找方式，其原因在於投資者通常是關心低於預期績效部份而非高於預期績效部份。儘管Markowitz在其後續研究中並未對半變異數的加以擴展，卻陸續有其他學者開始建構不同的投資組合選擇模型，如Estrada(2008)是利用半變異數來衡量資產的下方風

險，提出一簡便的方法來找出最佳投資組合。而另外一方面早在1952年Roy也就開始進行控制下方風險的研究，之後如Bawa及Lingenberg(1977)利用左偏動差（lower partial moment，簡稱LPM）來衡量資產的下方風險，Lucas等人(1998)與Campbell等人(2001)是利用風險值（Value-at-Risk，以下簡稱VaR）來衡量資產的下方風險，但Artzer等人(1999)指出VaR本身並不符合次可加性的特質，意即表示VaR並沒有分散投資組合風險的特質，因此增加新資產部位反而有可能會增加投資組合風險值。因此本文另外參考Rockafellar及Uryasev(2000)所提出的條件風險值（conditional value at risk，簡稱CVaR）來評估風險測量值。

另外，從平均數-變異數投資組合模型的假設部分，其所具備的前題為資產報酬分配必須為常態分配，並且投資者具有一個固定的二次效用函數。然而，過去研究文獻證明了實務上資產的報酬並不服從常態分配的假設(Lee, 2006)，且在Lee(2007)的文獻中則認為假設所有投資者具有一個固定的二次效用函數，並沒有一個可讓人信服的理由。再者，Markowitz所提出的平均數-變異數模型在超過一千檔股票的資產下，由於共變異數矩陣的複雜度提高，因此，在二次規劃的求解過程中，不僅提升了計算上的困難度，也增加了求解的時間。有鑑於此，Konno及Yamazaki利用分段線性風險函數(piecewise linear risk function)建構出平均數-平均絕對離差模型（mean-mean absolute deviation model，簡稱MMAD模型），其投資組合最適化的求解方式是透過線性規劃來取代在計算上較困難的二次規劃，不但降低計算上的困難度，同時也節省了計算時間，並且與MV模型一樣可達到分散風險的目的(Konno and Yamazaki, 1991)。

然而，前述學者們使用其他理論來發展投資組合的資產配置模型，不論是在理論或實務上比起平均數－變異數模型更加優越的風險衡量。即使如此，平均數－變異數模型仍是最廣為使用於求解資產配置問題，這是由於目前對於最適風險衡量的認定，仍尚未發展出可評價不同風險衡量方式的共同準則（Cheng 及 Wolverton, 2001; Byrne 及 Lee, 2004）。而在Cheng及Wolverton(2001)文章中，以不同的風險衡量方式來進行實證研究，在研究中指出了比較各模型間投資組合的困難點，他們發現每一種模型所產生的效率投資組合，僅侷限於該理論模型架構中。除此之外，他們認為除非在不

同風險衡量之間能夠發展出一套共同的評價準則，否則企圖尋找出能夠提供最優越的風險與報酬抵換之投資組合模型並沒有意義。在過去的文獻中，在做效率投資組合比較時，較注重的是目標空間上的比較，有鑑於上述作者的提醒，本研究擬參考Phillips(1993)所提供的分析觀點，透過不同風險的衡量模型在目標空間上所找到的效率投資組合，將其目標空間上的效率投資組合投射至相對應的決策空間中，比較其投資的資產種類與權重等相似性，以此來觀察不同風險衡量方式所產生的資產配置有何差異。

因此，本研究綜合過去文獻，以變異數、半變異數、左偏動差、平均絕對離差、條件風險值等方式來進行風險衡量，除了更加符合投資人對風險的態度，也更貼近實務上金融機構普遍使用上述衡量指標來衡量風險。此外，本研究還希望以不同的角度，將上述的風險衡量方式進行統整並作相似度分析。最後本文內容安排如下，首先在第二單元介紹不同風險衡量，於第三單元介紹在此些不同風險衡量下，最佳投資組合之推導，第四單元進行實務資料探討分析，並作出結論。

貳、風險衡量

一、變異數

投資組合係指由一種以上的證券或資產構成的集合，投資組合理論的焦點在於如何使風險最低、報酬率最大，以及如何在風險與投資績效間作取捨。自從Markowitz(1952)提出平均數-變異數模型後，變異數（或標準差）成為最廣為被學界與實務界廣泛使用的風險衡量(Evans, 2004)。變異數是用來衡量實際報酬之平均數或是期望值的散佈情形，其風險是以變異數來衡量如下：

$$\sigma_i^{\,2} = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(R_{it}-\mu_i\right)^2, i=1,...,K \tag{1}$$

其中 R_{it} 為第 i 項資產於第 t 期之報酬率，μ_i 為第 i 項資產的平均報酬率，σ_i^2 為第 i 項資產之變異數，其中 T 為總共觀測的期數。

二、半變異數

雖然 Markowitz 的平均數-變異數模型廣為大眾所使用，但是使用變異

數來衡量風險，其隱含投資者對於實際報酬高於或低於預期報酬的態度是沒有差異的。然而許多風險趨避型的投資者通常所關切的風險是低於某個目標報酬、預期報酬或基準點(benchmark)的部份，並且資產報酬不一定會服從常態分配，所以資產報酬為非常態分配時，下方風險是一個幫助投資者訂定適當決策的風險衡量指標。為了克服上述缺失，於是Markowitz(1959)提出了半變異數的概念，其風險是利用半變異數來衡量風險。由於半變異數是關注於實際報酬低於預期報酬的部份，因此，當 R_i 為離散型資料時，則第 i 個資產的半變異數定義如下：

$$SV_i = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(Min\left[0, R_{it} - \mu_i\right])^2, i = 1,...,K \tag{2}$$

三、左偏動差

就下方風險而言，Roy(1952)為最早提出損失風險觀念的學者，他僅選擇當投資價值低於某一事前定義之損失水準的機率計算風險，此為目前眾所皆知的損失風險計算方法之起源，直到Bawa(1975)及Fishburn(1977)提出左偏動差模型理論架構。此後，損失風險才有較正式的數學定義，其風險是以 n 階左偏動差來衡量，如下列數學式所表示：

$$LPM_n(\tau, R_i) = \int_{-\infty}^{\tau}(\tau - R_i)^n dF(R_i), i = 1,...,K \tag{3}$$

其中 τ 為目標報酬率(target return)，$F(R_i)$ 為資產報酬率的機率密度函數。若 R_i 為離散型資料，則 LPM 的數學式可表示如下：

$$LPM_n(\tau, R_i) = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left[Max\left(0, \tau - R_{it}\right)\right]^n, i = 1,...,K \tag{4}$$

在第(4)式中，當 $n = 0$ 時，LPM 則代表低於目標報酬率的機率(below-target probability)；$n = 1$ 時，LPM可視為預期損失(expected loss)；且 $n = 2$ 時，LPM則為低於目標報酬率的下方半變異數(below-target semivariance)，而Fishburn (1977)則證明了不同的 n 值可以描述投資人的投資行為，若 $n < 1$，表示投資者是風險的愛好者(risk-seeking behavior)，若 $n = 1$，投資人屬於風險中立者

(risk-neutral behavior)，若 $n > 1$，則是風險趨避者(risk-averse behavior)，而且隨著 n 值愈大表示投資人愈厭惡風險。而另外目標報酬率 (τ) 可視為投資者對風險的「心理認知」，目標報酬設得越高，則越多下方風險會被視為風險，所以投資者的風險承受能力越弱；反之，目標報酬設得越低，投資者的風險承受能力越強。

四、平均絕對離差

Konno(1990)指出，若風險衡量是將實際報酬與平均報酬或其他特定報酬相減後取平方的話，則對於樣本資料中的離群值較為敏感，會使得取平方後的離群值與平均報酬之間的差異更加擴大，進而影響到風險衡量的計算，但若將取平方的方式改成取絕對值時，則對於離群值較不敏感。因此，在計算投資組合最適化上，該學者建議利用平均絕對離差來進行風險衡量，其中第個資產的平均絕對離差的數學可表示如下：

$$MAD_i = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left|R_{it} - \mu_i\right|, i = 1,\ldots,K \tag{5}$$

五、條件風險值

條件風險值又稱尾部風險值(tail VaR)、期望差額(expect shortfall)或平均超額損失(mean excess loss)，則在 β 信賴水準下的條件風險值，本研究以符號 $CVaR_\beta(X)$ 來表示，其數學式表達如下：

$$CVaR_\beta(\mathbf{x}) = (1-\beta)^{-1}\int_{f(\mathbf{x},\mathbf{y})\geq VaR_\beta} f(\mathbf{x},\mathbf{y})p(\mathbf{y})d\mathbf{y} \tag{6}$$

且 $$\Pr(X_t \leq -VaR_\beta) = 1-\beta \tag{7}$$

其中 X_t：第 t 天的投資組合損益，正值代表收益，負值代表損失。

β：信賴水準，介於 0 和 1 之間。

VaR_β：投資組合 **X** 在信賴水準 β 下的風險值。

$f\,(\mathbf{x},\mathbf{y})$：投資組合 **X** 在 **y** 狀態下的損失。

$P\,(\mathbf{y})$ ：投資組合損失機率分配。

參、不同風險衡量之投資組合模型

一、投資組合模型

現代投資組合理論中所稱的效率前緣(efficient frontier)為最小變異投資組合機會集合(minimum variance portfolio opportunity set)，也就是在既定的平均報酬與投入資金下，求風險最小時之各資產投資比重，或是在既定的風險（變異數）下求期望報酬最大的資產配置組合。一般而言，投資者是在既定的報酬下，來極小化投資風險為目標，而隨著各學者對風險的定義與衡量方式的不同，此模式的目標式中的風險也隨之改變。

㈠平均數-變異數投資組合模型

風險若是以變異數作為衡量指標時，則 MV 模型為：

$$\begin{aligned} &Min \quad \sigma_p^{\,2} = \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K} w_i w_j \sigma_{ij} = \underset{\sim}{w}^T \textstyle\sum_v \underset{\sim}{w} \\ &s.t. \quad \sum_{i=1}^{K} \mu_i w_i = \underset{\sim}{w}^T \underset{\sim}{\mu} = \mu_p \\ &\qquad\ \ \sum_{i=1}^{K} w_i = \underset{\sim}{w}^T I = 1 \end{aligned} \tag{8}$$

其中 μ_p 為事先給定的常數，σ_p^2 為投資組合報酬率之變異數，即投資風險；μ_i 為第 i 種投資標的之歷史平均報酬率；w_i 為第 i 種投資標的之投資比例；σ_{ij} 為第 i 與第 j 種投資標的之報酬共變異數；Σ_v 為變異數－共變數矩陣，$\underset{\sim}{w}^T = (w_1, ..., w_K)$，$\underset{\sim}{\mu}^T = (\mu_1, ..., \mu_K)$ 且 $I^T = (1, ..., 1)$。在傳統的 MV 模式下，最適投資權重 w^* 可利用 Lagrangian 方式得到如下：

$$\underset{\sim}{w}^* = \frac{1}{AC - B^2}\left\{\left[A \textstyle\sum_v^{-1} I - B \textstyle\sum_v^{-1} \underset{\sim}{\mu}\right] + \mu_0\left[C \textstyle\sum_v^{-1} \underset{\sim}{\mu} - B \textstyle\sum_v^{-1} I\right]\right\} \tag{9}$$

其中 $A = \underset{\sim}{\mu}^T \sum_v^{-1} \underset{\sim}{\mu}$；$B = \underset{\sim}{\mu}^T \sum_v^{-1} I = I^T \sum_v^{-1} \underset{\sim}{\mu}$；$C = I^T \sum_v^{-1} I$ 。

㈡平均數－半變異數投資組合模型

針對此模型，Estrada(2008)提出利用近似估計投資組合報酬的變異數方式來估計投資組合報酬的半變異數，且 Estrada(2002, 2007)將 Hogan 及 Warren (1974)的半變異數 σ_{ij}^{HW}（以⑽式表示）重新定義成如⑾式之 $\sigma_{ij\beta}$，此方法克服了基準點(B)必須設定為無風險報酬的限制，以及半共變異數矩陣為非對稱性 ($\sigma_{ij\beta}\neq\sigma_{ji\beta}$) 此兩個缺點。

$$\sigma_{ij}^{HW}=E\left\{\left(R_i-R_f\right)\bullet Min\left(R_j-R_f,0\right)\right\} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{ijB}&=E\left\{Min\left(R_i-B,0\right)\bullet Min\left(R_j-B,0\right)\right\}\\&=\left(\frac{1}{T}\right)\sum_{t=1}^{T}\left[Min\left(R_{it}-B,0\right)\bullet Min\left(R_{jt}-B,0\right)\right]\end{aligned} \tag{11}$$

其中，R_f 為無風險利率；B 為基準點，亦可為目標報酬率 τ。

此方法的優點在於：一、計算上與變異數方式一樣容易。二、計算過程沒有使用到艱澀困難的演算法。因此，本研究在半變異數計算上，參照 Estrada(2008)的計算方式，其中基準點(B)可設定是以每個資產各自的平均報酬率作為基準點來進行計算，其限制式與 MV 模型相同，由此可建構出平均數-半變異數模型（mean-semivariance model，簡稱 MSV）。因此，MSV 模型可以寫成：

$$\begin{aligned}&Min\ \ \sigma_{pB}^2=\sum_{i=i}^{K}\sum_{j=1}^{K}w_iw_j\sigma_{ijB}^2=\underset{\sim}{w}^T\,\Sigma_{sv}\,\underset{\sim}{w}\\&s.t.\quad \underset{\sim}{w}^T\underset{\sim}{\mu}=\mu_p\\&\qquad\ \ \underset{\sim}{w}^T I=1\end{aligned} \tag{12}$$

其中 Σ_{sv} 為變異數－半共變數矩陣且 $\Sigma_{sv}=\left[\sigma_{ijB}\right]_{ij}$ 。

同樣可以利用 Lagrangian 方式得到此模式的最佳解如下：

$$\underset{\sim}{w}^*=\frac{1}{AC-B^2}\left\{\left[A\Sigma_{sv}^{-1}I-B\Sigma_{sv}^{-1}\underset{\sim}{\mu}\right]+\mu_p\left[C\Sigma_{sv}^{-1}\underset{\sim}{\mu}-B\Sigma_{sv}^{-1}I\right]\right\} \tag{13}$$

其中$A=\underset{\sim}{\mu}^T \Sigma_{sv}^{-1} \underset{\sim}{\mu}$；$B=\underset{\sim}{\mu}^T \Sigma_{sv}^{-1} I = I^T \Sigma_{sv}^{-1} \underset{\sim}{\mu}$；$C = I^T \Sigma_{sv}^{-1} I$ 。

㈢平均數－左偏動差投資組合模型

Bawa 及 Lindenberg(1977)和 Fishburn(1977)利用 Markowitz 投資組合 MV 模型的觀念，將目標式的風險由LPM取代之，即建構出平均數－左偏動差模型（mean-lower partial moment model，簡稱MLPM）。因此，在連續型的模式下，MLPM 模式可寫成：

$$
\begin{aligned}
& Min \ \ LPM_n(\tau,R) = \int_{w^T R \le \tau} (\tau - w^T R)^n dF(R) \\
& s.t. \ \ \underset{\sim}{w}^T \underset{\sim}{\mu} = \mu_p \\
& \qquad \underset{\sim}{w}^T I = 1
\end{aligned}
\tag{14}
$$

而其離散型可由下式表示：

$$
\begin{aligned}
& Min \ \ LPM_n(\tau,R_i) = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}\left[Max\left(0,\tau-R_i\right)\right]^n = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(Max[0,(\tau-\sum_{i=1}^{K} w_i R_{it})])^n \\
& s.t. \ \ \underset{\sim}{w}^T \underset{\sim}{\mu} = \mu_p \\
& \qquad \underset{\sim}{w}^T I = 1
\end{aligned}
\tag{15}
$$

上述目標函數無法像 MV 模型一樣，求出$\underset{\sim}{w}$的封閉解。因此，為求上式最佳投資組合，可令

$$
V_t = Max[\,0,\tau - \sum_{i=1}^{K} w_i R_{it}\,]
$$

將⒂式轉換成：

$$
\begin{aligned}
& Min \ \ \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} V_t^n \\
& s.t. \ \ \underset{\sim}{w}^T \underset{\sim}{\mu} = \mu_p \\
& \qquad \underset{\sim}{w}^T I = 1 \\
& \qquad \sum_{i=1}^{K} w_i R_{it} + V_t \ge \tau
\end{aligned}
\tag{16}
$$

其中 $V_t \geq 0$ 且 $t = 1, 2, ..., T$。

由於上述模型較為複雜，無法求得封閉解，所以我們可以利用滿足 Karush-Kuhn-Tucker 條件（簡稱 KKT 條件）來求出最佳投資組合權重如下：

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \sum_{t=1}^{T} V_t^n}{\partial w_i} + \varepsilon_1 \left[\underset{\sim}{w}^T \underset{\sim}{\mu} - \mu_0 \right] + \varepsilon_2 \left[-\underset{\sim}{w}^T \underset{\sim}{\mu} + \mu_p \right] + \xi_1 \left[\underset{\sim}{w}^T I - 1 \right] + \xi_2 \left[\underset{\sim}{w}^T I + 1 \right] \\
&\qquad + \sum_{t=1}^{T} \mu_t \left(-\sum_{i=1}^{K} w_i R_{it} - V_t + T \right) + \sum_{t=1}^{T} \lambda_t \left(-V_t \right) = 0 \\
&\varepsilon_1 \left[\mu_p - \underset{\sim}{w}^T \underset{\sim}{\mu} \right] = 0 \\
&\varepsilon_2 \left[-\mu_p + \underset{\sim}{w}^T \underset{\sim}{\mu} \right] = 0 \\
&\xi_1 \left[1 - \underset{\sim}{w}^T I \right] = 0 \\
&\xi_2 \left[-1 + \underset{\sim}{w}^T I \right] = 0 \\
&\left[\frac{\partial \sum_{t=1}^{T} V_t^n}{\partial w_i} + \sum_{t=1}^{T} \mu_t \left(-\sum_{i=1}^{K} w_i R_{it} - V_t \right) \right] w_i = 0 \ , \ i = 1, ..., K \\
&\left[\frac{\partial \sum_{t=1}^{T} V_t^n}{\partial w_i} + \sum_{t=1}^{T} \lambda_t \left(-V_t \right) \right] w_i = 0 \ , i = 1, ..., K \\
&\varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0 \\
&\xi_1, \xi_2 \geq 0 \\
&\mu_t \geq 0 \ , \ t = 1, ..., T \\
&\lambda_t \geq 0 \ , \ t = 1, ..., T
\end{aligned}
\tag{17}
$$

在MLPM模式下，亦可參考MSV模式做法，得到以下最佳投資組合 $\underset{\sim}{w}^*$：

$$
\underset{\sim}{w}^* = g + h \mu_p \tag{18}
$$

其中 $g = \left(\frac{1}{D} \right) \left[B(\Sigma_{(n,T)}^{-1} I) - A \left(\Sigma_{(n,T)}^{-1} \underset{\sim}{\mu} \right) \right]$，$h = \left(\frac{1}{D} \right) \left[C(\Sigma_{(n,T)}^{-1} \underset{\sim}{\mu}) - A \left(\Sigma_{(n,T)}^{-1} I \right) \right]$，

$B = \underset{\sim}{\mu}^{\mathrm{T}} \Sigma_{(n,T)}^{-1} \underset{\sim}{\mu}$ ； $C = I^{\mathrm{T}} \Sigma_{(n,T)}^{-1} I$ ； $D = BC - A^2$ ； $\Sigma_{(n,T)} = [CLPM_{i,j,n}]$ ；

且 $CLPM_{i,j,n} = \left(\frac{1}{T}\right) \sum_{t=1}^{T} \left[\left(Min\,(R_{it} - B, 0) \right)^{n-1} \left(R_{jt} - B, 0 \right) \right]$ 。

在本研究在利用 MLPM 模型求解最適投資組合時，參考 Byrne 及 Lee (2004)在進行投資組合模型分析時，將目標報酬率設為零，動差階次設為二階，其限制式的要求則與 MV 模型相同。

㈣平均數－平均絕對離差投資組合模型

Konno(1990)利用分段線性風險函數提出了投資組合最適化模型，此模型是以平均絕對離差代表風險，即建構出平均數－平均絕對離差投資組合模型如下：

$$\begin{aligned} & Min\ \ MAD = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \left| \sum_{i=1}^{K} (R_{it} - \mu_i) w_i \right| \\ & s.t.\quad \underset{\sim}{w}^T \underset{\sim}{\mu} = \mu_p \\ & \qquad\ \ \underset{\sim}{w}^T I = 1 \end{aligned} \tag{19}$$

針對⒆式的MMAD模型，可令 $d_t^+ - d_t^- = \sum_{i=1}^{K} (R_{it} - \mu_i) w_i$ 後，使用此簡化方式，我們可將⒆式轉換成如下數學模型來進行求解MMAD模型之最適投資權重。

$$\begin{aligned} & Min\ \ MAD = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \left(d_t^+ + d_t^- \right) \\ & s.t.\quad \sum_{i=1}^{K} \mu_i w_i = \mu_p \\ & \qquad\ \ d_t^+ - d_t^- = \sum_{i=1}^{K} (R_{it} - \mu_i) w_i \quad , t = 1, 2, ..., \mathrm{T} \\ & \qquad\ \ \sum_{i=1}^{K} w_i = 1 \\ & \qquad\ \ d_t^+, d_t^- \geq 0, t = 1, ..., T \end{aligned} \tag{20}$$

另外，在⒆式MMAD模式中，亦可參考Konno及Yamazaki(1991)，令 $\alpha_{it}=R_{it}-\mu i$ 後，將⒆式引導成如下的極小化問題。

$$\begin{aligned}
&Min\ \ MAD=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left|\sum_{i=1}^{K}a_{it}w_i\right| \\
&s.t.\ \ \sum_{i=1}^{K}\mu_i w_i=\mu_p \\
&\qquad \sum_{i=1}^{K}w_i=1
\end{aligned} \tag{21}$$

針對⒇式，再令 $y_t=\left|\sum_{i=1}^{K}a_{it}w_i\right|$ 可得下列(22)式：

$$\begin{aligned}
&Min\ \ MAD=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}y_t \\
&s.t.\ \ \sum_{i=1}^{K}\mu_i w_i=\mu_p \\
&\qquad y_t+\sum_{i=1}^{K}a_{it}w_i\ge 0\,,\,t=1,....,T \\
&\qquad y_t-\sum_{i=1}^{K}a_{it}w_i\ge 0\,,\,t=1,....,T \\
&\qquad \sum_{i=1}^{K}w_i=1
\end{aligned} \tag{22}$$

在MMAD模型下，分別可針對⒇或(22)式，利用線性規劃單型法(simplex method)，便可很容易地求解出最適投資權重 $\underset{\sim}{w}^*$。

㈤平均數-條件風險值投資組合模型

本研究依照上述MV模型的建構方式，在既定投資組合的預期報酬下，極小化投資組合的 CVaR，因此將目標式的風險由 CVaR 取代之，即建構出平均數－條件風險值模型（mean-conditional value at risk model，簡稱 MCVaR）如下：

$$\begin{aligned} & Min \quad CVaR_\beta = -\frac{1}{\beta} \int_{f(x,y) \le -VaR_\beta} f(x,y)p(y)dy \\ & s.t. \quad \underset{\sim}{w}^T \underset{\sim}{\mu} = \mu_p \\ & \qquad\ \ \underset{\sim}{w}^T \underset{\sim}{1} = 1 \end{aligned} \tag{23}$$

類似前述作法，可利用Lagrangian方法，求得最佳投資組合$\underset{\sim}{w}^*$，必須滿足以下等式：

$$-\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{w}} \int_{R \le -VaR_\beta} R\, f(R)dR + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{w}}\left(\underset{\sim}{w}^T \underset{\sim}{\mu} - \mu_p\right) + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{w}}\left(\underset{\sim}{w}^T \underset{\sim}{1} - 1\right) = 0 \tag{24}$$

$$\underset{\sim}{w}^T \underset{\sim}{\mu} = \mu_p$$

$$\underset{\sim}{w}^T \underset{\sim}{1} = 1$$

另外，若模式為離散型下，根據Rockafellar及Uryasev(2000)與Angelelli等人(2008)提出同樣以條件風險值作為衡量風險的指標，於極小條件風險值的模型中，加入最低報酬限制，將線性規劃應用到條件風險值效率前緣的建構，MCVaR模式可修正如下：

$$\begin{aligned} & Max \quad z = \eta - \frac{1}{\beta}\sum_{t=1}^{T} h_t p_t \\ & s.t. \quad h_t \ge \eta - \sum_{i=1}^{K} R_{it} w_i,\ t = 1,\ldots,T \\ & \qquad\ \ \underset{\sim}{w}^T \underset{\sim}{\mu} = \mu_p \\ & \qquad\ \ \underset{\sim}{w}^T \underset{\sim}{1} = 1 \\ & \qquad\ \ d_t \ge 0,\ t = 1,\ldots,T \end{aligned} \tag{25}$$

其中 $F_x(\eta) = P\{R(x) \le \eta\}$ 代表報酬率的累積分配函數，P_t 代表情境狀態 t 的機率且 $h_t = Max\{0, \sum_{i=1}^{K}(u_i - R_{it})w_i\}$ 。

而就MCVaR模式，在 $f(R)$ 為常態分配下，參考Gordon及Alexandre(2002)，可修正求出在MVCaR模式下之最佳投資組合權重：

$$w_{\beta}^{*} = g + h\left[\frac{B}{C} + \sqrt{\frac{D}{C}\left(\frac{c_2^2(\beta)}{Cc_2^2(\beta) - D} - \frac{1}{C}\right)}\right] \tag{26}$$

其中 $c_2^2(\beta) = \left\{\left\{\sqrt{2\pi}\exp\left[erf^{-1}\left(2\beta - 1\right)\right]\right\}^2 \left(1 - \beta\right)\right\}^{-1}$，且 $erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2}dt$

$A = \underset{\sim}{\mu}^{\mathrm{T}}\Sigma_v^{-1}\underset{\sim}{\mu}$；$B = I^{\mathrm{T}}\Sigma_v^{-1}\underset{\sim}{\mu}$；$C = I^{\mathrm{T}}\Sigma_v^{-1}I$；$D = AC - B^2$；

$g = \left(\frac{1}{D}\right)\left[A(\Sigma_v^{-1}I) - B\left(\Sigma_v^{-1}\underset{\sim}{\mu}\right)\right]$；$h = \left(\frac{1}{D}\right)\left[C(\Sigma_v^{-1}\underset{\sim}{\mu}) - B\left(\Sigma_v^{-1}I\right)\right]$。

二、投資組合相似度指標

過去研究在比較兩投資組合模型之間的優劣時，一般常用的績效指標有利用超額報酬與本身投資風險變動率的 Sharpe 指標、風險值、Treynor 指標(Cuthbertson, 1996)或是報酬對半變動比率(reward-to-semivariablity，*R*/*SV*)(Nawrocki, 1999)來衡量各模型的投資組合績效。然而，Byrne 及 Lee(2004)已指出對於投資者而言，投資組合模型的選擇是仰賴於個人自身對於風險的態度與投資目的，而非取決於各模型之間無論是在理論或實務上的優劣程度，並且本研究的目的在於協助不同風險趨避程度的投資人選擇出適合自身的投資組合模型。因此在分析各模型的效率投資組合上，所尋找出的效率投資組合，著重於觀察效率投資組合的內部結果（其中包含資產的投資個數、權重），藉以比較各模型之間的差異。有鑑於此，本研究參考Phillips(1993)所提供的分析觀點，透過不同風險的衡量模型在目標空間上所找到的效率投資組合，將其目標空間上的效率投資組合投射至相對應的決策空間中，比較其投資的資產種類與權重，來觀察不同風險衡量方式所產生的資產配置有何差異，如下圖 1 所示。因此本文利用投資組合覆蓋率指數(overlap index)、投資組合權重指數(weight index)以及投資組合相似指數(similarity index)作為本研究的分析指標。

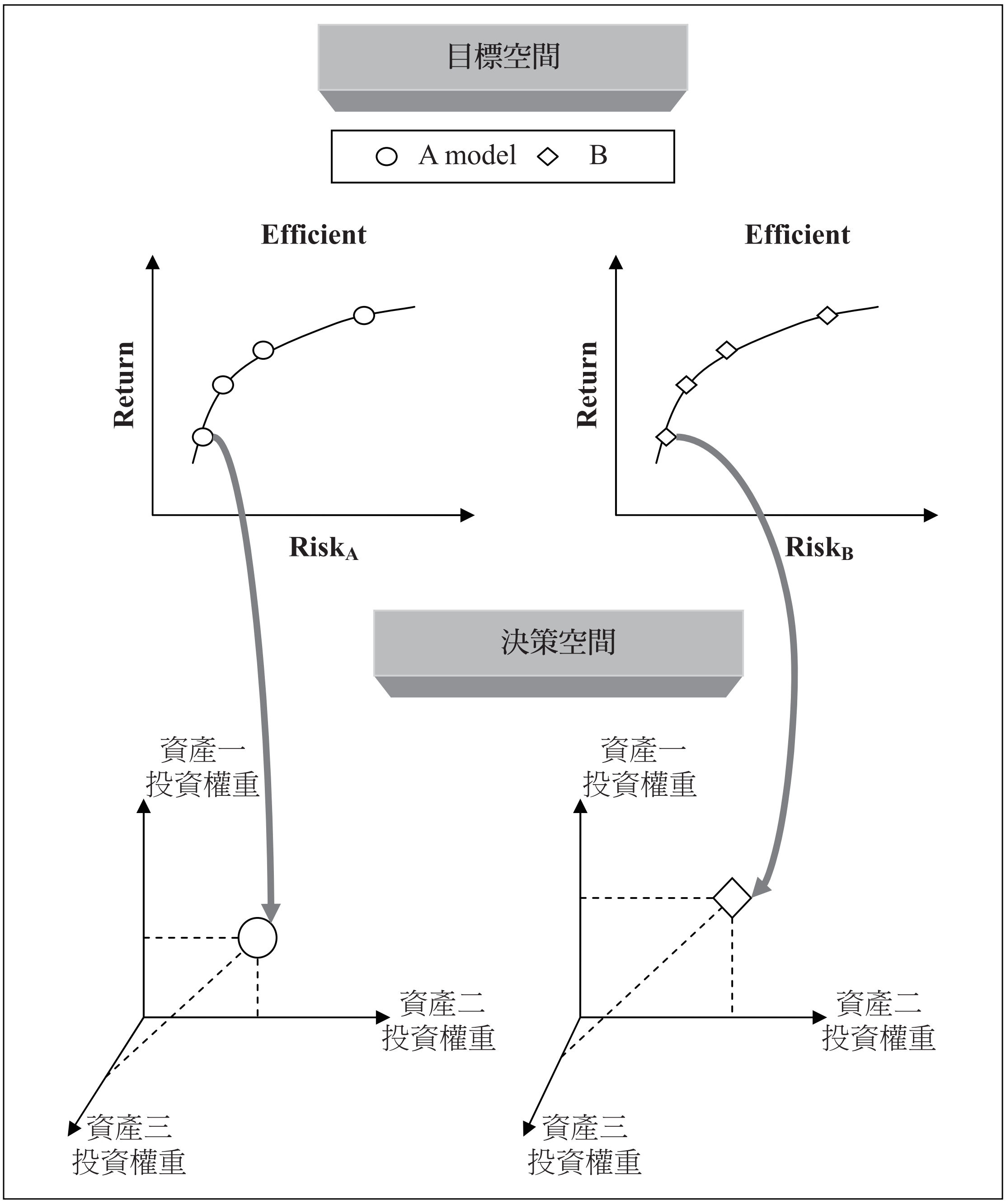

圖 1　效率投資組合之目標空間與決策空間示意圖

在眾多不同風險衡量之投資組合下，為了研究任意兩個投資組合模型間，其效率投資組合的相似程度之前，必須先前具備兩項資訊。第一，必須得知兩個效率投資組合之間具投資相同種類資產的數量。第二，必須得知兩個效率投資組合之間具投資相同種類資產的投資權重。在取得上述兩項資訊後，接下來要分別計算出覆蓋指數與權重指數，最後再將覆蓋率指數與權重指數相乘即為相似指數，其計算方式如下：以投資組合 I 與 II 模型為例，假設欲得知此兩模型所計算出來的最小風險效率投資組合之間的相似指數，N_t 表示I模型選擇進行投資的資產集合，N_{it} 且表示II模型選擇進行投資的資產集合，此外，$\{N_t \cap N_{it}\}$ 代表 I 與 II 模型皆有投資的資產，且 $\{N_i \cup N_{it}\}$ 代表 I 或 II 模型有選擇投資的資產，亦即：

$$\#\left\{N_I \cup N_{II}\right\} = \#\left\{N_I\right\} + \#\left\{N_{II}\right\} - \#\left\{N_I \cap N_{II}\right\} \tag{27}$$

其中 $\#\{\cdot\}$ 代表集合中的個數。

有了 $\{N_I \cap N_{II}\}$ 與 $\{N_I \cup N_{It}\}$，則可計算出覆蓋指數為，其公式如下：

$$\text{覆蓋指數} = \#\left\{N_I \cap N_{II}\right\} / \#\left\{N_I \cup N_{II}\right\} \tag{28}$$

接著，計算權重指數，將 I 與 II 模型的效率投資組合，將其所投資的相同資產於兩模型中選出權重較小的數值，並進行加總即可得知權重指數。最後，將覆蓋率指數與權重指數相乘即可得到 I 與 II 模型的效率投資組合間之相似指數。

肆、不同風險衡量下，投資組合模型分析與比較

一、資料描述

在市場資料的選取上，本研究使用了台灣 50 指數成分股作為分析對象，取樣的時間為 2002 年 3 月 8 日至 2008 年 1 月 11 日，資料的取得以每週最後一個營業日之收盤價當作樣本值。但由於每家企業的成立時間不同，以致於上市的時點有所差異，因此本文所收集的樣本資料中並非所有股票都可得到 362 筆週資料。所以，本文將未含有 300 筆週資料的股票予以刪除，最後僅利用剩下 40 支股票含有 300 筆完整的週資料，來計算出每支股

票每週的報酬率。而上述樣本的報酬率是以$\ln(P_t/P_{t-1})$的方式計算取樣期間內的實際報酬，其中P_t為第t週之收盤價，而P_{t-1}為第$t-1$週之收盤價。接著，將樣本數據投入各個投資組合模型中，並使用 S-PLUS 6.1 軟體來求解出每支股票每週的預期報酬、標準差、偏態係數，並檢測此些樣本是否會符合多元常態分配？當資料若不符合多元常態時，先求解出最適投資組合，再觀察不同投資組合的差異性。除了分析不同投資組合模型的最適投資平均權重之間是否有差異之外，還進一步分析其效率投資組合的資產配置與投資組合相似度，以提供投資者更多元或更多不同角度的投資組合建議。

在取得樣本後，除了探討 MV、MLPM、MSV、MMAD 以及 MCVaR 五種模型是否存在著投資決策上的差異外，本研究尚考慮在不同風險區域中，此些方法所找出來的Sharpe值是否亦存在差異。所以本研究於樣本期間內，利用各投資組合模型所求解出三十組效率投資組合，按照報酬與風險排序，其中將每十組效率投資組合劃分一個區域，共分成低度風險、中度風險以及高度風險三個區域，如圖 2 所示。

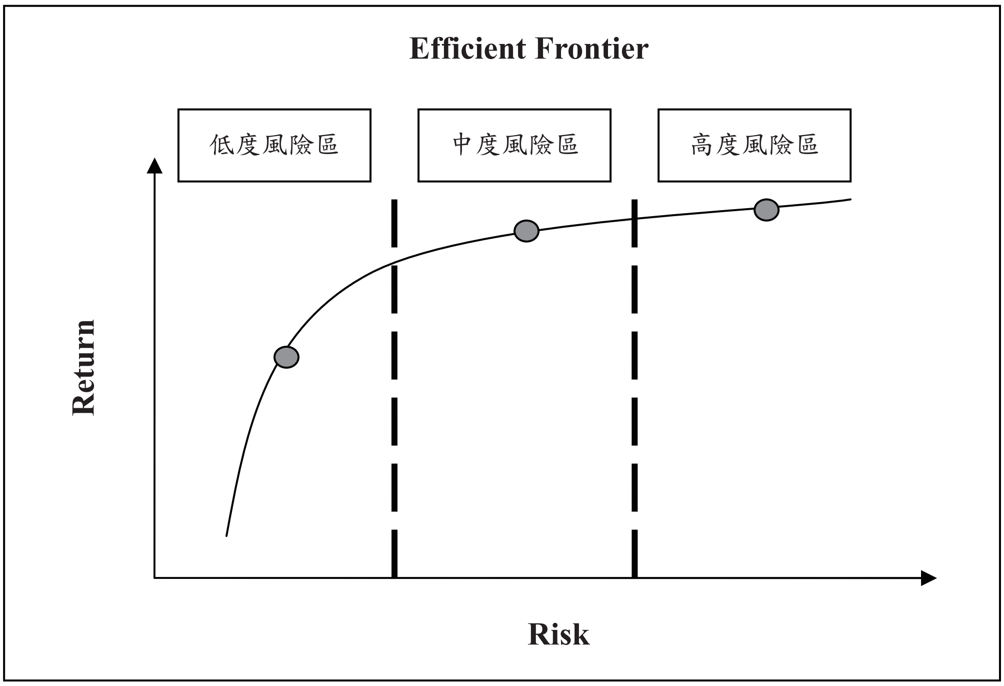

圖 2　投資組合之風險區分示意圖

二、台灣前 50 指數成份股之敘述性統計

台灣前 50 指數成份股之敘述性統計分析如下：以平均報酬而言，其中以鴻準為最高，其平均報酬為 0.008142；而平均報酬最低者為聯電，其平均報酬為-0.002137。在標準差方面，以友達為最高，其標準差為 0.062033，其次為鴻準，其標準差為 0.061338，顯示鴻準為高風險高報酬的股票；而最低者為中華電，次低者為遠傳，其標準差分別為 0.022204 與 0.029332。從偏態係數來看，屬於左偏分配的股票為台泥、亞泥、統一、台塑、遠紡、台肥、中鋼、長榮海運、富邦金、國泰金、元大金、新光金、統一超、寶成工業、南科、遠傳、聯強國際，其中左偏係數最高者為中鋼，其左偏係數為-0.852314；而其餘股票皆呈現右偏分配，其右偏係數最高者為華南金，其右偏係數為 0.634780。由峰態係數可得知，只有富邦金的峰態係數為 2.985315，其峰態係數最接近 3，呈現常態峰的分配型態；而其餘三十九檔股票的峰態係數皆大於三，呈現高狹峰的分配型態，其中數值最大者為華南金，峰態係數為 9.451138。因此，由上可知樣本大多屬於高狹峰的分配型態，因此再利用 Jarque-Bera 之常態分配檢定來檢定個別資產報酬是否常態分配，經檢定結果得知，只有富邦金是服從常態分配，其餘三十九檔股票皆不服從常態分配。本研究進一步利用 Shapiro-Wilk 之多元常態檢定(Patrick, 1982)，驗證此四十檔股票之整體樣本是否服從多元常態檢定。經檢定結果得到顯著值(p-value)為 0.0000，此表示在 $\alpha=0.05$ 的顯著水準下，此四十檔股票之整體樣本不服從多元常態檢定。

三、台灣前 50 成份股之平均資產配置

為了探討不同風險衡量方式所產生的效率投資組合及其所對應的資產配置是否存在差異，首先本文將各模型所得之資產的平均投資權重整理成表 1。從表 1 中，若就每支股票投資平均權重的角度來分析，我們可得知 MV 模型所計算出來的結果與 MMAD 模型最為類似，而 MLPM、MSV 與 MCVaR 模型所得出來的結果較相似。

表 1　五種投資模型所求出的台灣前 50 成份股之平均投資權重

投資標的	台泥	亞泥	統一	台塑	南亞塑膠	遠紡	台肥	中鋼
MV	0.22	0	0	1.52	0	0	0	0.077
MLPM	0	0	0	7.62	0	1.25	0	0.62
MSV	0.13	0	0	5.51	0	2.66	0	0.59
MMAD	0.25	0	0	1.05	0	0	0	0
MCVaR	0.25	0	0	7.23	0	2.19	0	0.53
投資標的	長榮海運	彰化銀行	華南金	富邦金	國泰金	開發金	元大金	兆豐金
MV	0	0	4.12	6.5	0	0	0	0
MLPM	0	0	1.02	4.99	0	14.74	0	0
MSV	0	0	0.68	7.1	0	14.03	0	0
MMAD	0	0	2.89	9.37	0	0	0	0
MCVaR	0	0	2.82	3.44	0	14.42	0	0
投資標的	台新金控	新光金	統一超	寶成工業	聯電	日月光	矽品	台積電
MV	0.013	0	0.003	0	0	0.017	0	0.42
MLPM	0	3.74	0	0	0	0	0	0
MSV	0	3.5	0	0	0	0	0	0.84
MMAD	0	0	0	0	0	0	0	0
MCVaR	0	2.66	0	0	0	0	0.4	0
投資標的	南科	聯發科	光寶科技	仁寶電腦	宏碁	華碩	廣達	友達
MV	0	0	34.36	1.54	6.31	7.59	1.64	0
MLPM	0.18	0	26.92	0.84	3.81	2.2	0.84	0
MSV	0.3	0	21.28	0.69	6.22	2.4	0.69	0
MMAD	0	0	35.09	0.54	5.28	8.18	0.54	0.05
MCVaR	1.99	0	25.76	1.88	3.87	2.52	1.88	0
投資標的	中華電	宏達電	台灣大	遠傳	台達電	聯強國際	鴻海	鴻準
MV	0.05	1.36	15.73	5.39	0	6.19	6.97	0
MLPM	0	0	16.26	6.56	0	7.16	1.25	0
MSV	0.91	0.003	13.97	8.75	0	6.17	3.58	0
MMAD	0.66	3.02	10.61	8.22	0	7.81	7.7	0
MCVaR	0	0	18.52	3.8	0	5.85	0	0

四、台灣前 50 指數成份股之各投資組合模型相似度分析

以台灣前 50 指數成份股作為研究樣本（週資料）下，透過不同投資組合模型所找出來的效率投資組合，以不同角度來探討模式的差異性，並計算出各模型間的平均投資個數、投資組合覆蓋、權重以及相似指數等相似程度如表 2。

在表 2 中，A 部份顯示 MV 模型所找出來的效率投資組合，所投資資產個數為最高，其平均投資了 9.76 個資產，最多到 15 個，最少為 1 個資產；MLPM 模型所找出來的效率投資組合，所投資資產個數為最少，其平均投資了 6.5 個資產，最多到 10 個，最少為 1 個資產，這代表 MV 模式所需投資的股票支數在 5 個模式中平均較多。B 部份顯示不同投資組合模型之間，投資相同資產的個數。例如，在 MV 模型所找出來的效率投資組合中平均包含了 9.7 個資產，與 MSV 最適解中平均包含 7.63 個資產，其中所投資平均有 5.9 個資產是相同的。另外，顯示 MLPM 與 MSV 模型所投資的相同資產種類個數平均為 6.4 個，與其他模型相較下是多的，這代表 MSV 與其他幾個模型所選的投資標的重複性較高。C 部份顯示不同投資組合模型之間，效率投資組合的資產覆蓋率，此意指任兩個投資組合模型所找出的效率投資組合，有多少比例是投資於相同的資產上，結果顯示 MLPM 模型與 MSV 模型所投資於相同資產的比例為 82.76，與其他模型相較下為最高的，而 MSV 與 MV、MLPM 及 MCVaR 的覆蓋率均相對地高。D 部份顯示兩模型所找出效率投資組合的覆蓋集合，MV 與 MMAD 模型的投資組合覆蓋指數為 87.83% 為最高，而 MMAD 與 MCVaR 模型的投資組合覆蓋指數為 54.47% 為最低。最後，E 部份所顯示 MLPM 與 MSV 模型最為相似，其相似度指標為 71.93%，而 MMAD 與 MCVaR 模型相似程度為最低，其相似度為 23.62%。從相似度角度而言，MLPM 與 MSV 之間的最適資產配置決策較相近；而 MV 則與 MMAD 的最適資產配置決策較相近。此外，MLPM 與 MSV 之間的相似度指數位居第一，其中，MLPM 與 MSV 之間的相似度指數位居第一之主要原因在於，此兩者都是基於下方風險的觀念所發展出來的模型，而 MSV 又為 MLPM 的特例，並且本研究進行實證研究時，是將 MLPM 模型的階數設為二階，再者 MLPM 與 MSV 模型之間的差異，僅止於目標報酬率之設定，因此，導致

表 2　不同投資模型之平均投資個數、相同資產個數、覆蓋、權重及相似指數（週資料）

A：資產平均投資個數	MV	MLPM	MSV	MMAD	MCVaR
平均個數	9.7	6.5	7.63	8.2	6.57
最大個數	15	10	14	11	9
最小個數	1	1	1	4	1
B：投資相同的資產個數	MV	MLPM	MSV	MMAD	MCVaR
MV	9.7				
MLPM	5.03	6.5			
MSV	5.9	6.4	7.63		
MMAD	5.03	4.7	5.23	8.2	
MCVaR	4.87	5.8	5.8	4.47	6.57
C：投資組合覆蓋指數	MV	MLPM	MSV	MMAD	MCVaR
MV	100				
MLPM	45.08	100			
MSV	51.6	82.76	100		
MMAD	39.12	47	49.37	100	
MCVaR	42.69	79.82	69.05	43.37	100
D：投資組合權重指數	MV	MLPM	MSV	MMAD	MCVaR
MV	100				
MLPM	67.45	100			
MSV	65.62	86.92	100		
MMAD	87.83	61.63	60.96	100	
MCVaR	62.18	85.05	77.26	54.47	100
E：投資組合相似指數	MV	MLPM	MSV	MMAD	MCVaR
MV	100				
MLPM	30.4	100			
MSV	33.86	71.93	100		
MMAD	60.96	28.97	30.1	100	
MCVaR	26.545	67.88	53.34	23.62	100

MLPM 與 MSV 之間的相似度指數位居第一位。而 MV 與 MMAD 之間的相似度指數較高之原因在於，此兩者都是不僅考慮到下方風險的觀念，也同時顧及到上方潛在獲利變異的部份，所以 MV 與 MMAD 是同時考慮到上方與

表 3　不同投資模型之平均投資個數、相同資產個數、覆蓋、權重及相似指數（月資料）

A：資產平均投資個數	MV	MLPM	MSV	MMAD	MCVaR
平均個數	9.53	6.23	6.1	7.47	7.03
最大個數	13	11	10	10	12
最小個數	1	1	1	2	1
B：投資相同的資產個數	MV	MLPM	MSV	MMAD	MCVaR
MV	9.53				
MLPM	5.37	6.23			
MSV	5.33	5.7	6.1		
MMAD	6.7	4.63	4.87	7.47	
MCVaR	4.87	5.13	4.8	4.13	7.03
C：投資組合覆蓋指數	MV	MLPM	MSV	MMAD	MCVaR
MV	100				
MLPM	51.6	100			
MSV	51.78	85.93	100		
MMAD	65.05	151.1	55.94	100	
MCVaR	42.69	63.11	57.6	39.87	100
D：投資組合權重指數	MV	MLPM	MSV	MMAD	MCVaR
MV	100				
MLPM	65.32	100			
MSV	67.17	94.2	100		
MMAD	82.92	60.19	63.21	100	
MCVaR	54.04	76.28	75.07	49.78	100
E：投資組合相似指數	MV	MLPM	MSV	MMAD	MCVaR
MV	100				
MLPM	33.71	100			
MSV	34.78	80.94	100		
MMAD	53.94	30.76	35.36	100	
MCVaR	22.48	48.14	43.24	19.85	100

下方風險所發展出來的模型，然而 MV 模型卻是立基於上方與下方風險是對稱之假設，而MMAD則是立基於上方與下方風險是非對稱之假設，因此由於模型在觀念上的不同，而導致 MV 與 MMAD 之間的相似度指數僅位居

第二或第三位。

為了探討利用「週」資料來探討五種投資組合相似性的合理性，本文繼續用原樣本資料，以一個月為基礎，將平均收益以「月」資料來計算，共可得到70筆月資料，本文再利用如前述做法重新計算五種投資組合的相似性比較，所得結果如表3。在表3中，5種不同的比較指標，除了數字與表2不同外，所得的相似度分析結論皆與利用「週」資料的結論相同，亦即MLPM與MSV之間的相似度指數位居第一位，而MV與MMAD之間的相似度指數較高。由上述兩種不同的資料分類法，分析所得結論一致，更可說明此些模型間在投資決策上彼此間的相似性。

綜合上述分析，在不同投資組合模型下，以不同角度來分析投資組合決策空間的相似性，結果可發現：不同風險測量會產生極大差異的投資組合配置，其中相似性高的投資組合模式，對於決策者使用此些模式所得之最佳投資組合差異性就不大；而另一方面，若相似性越低，對於一位投資者更須確定他對風險的定義，否則最佳投資組合差異即相當地大。此結論在實務或經濟的角度上，一位投資者必須先確定他對於風險態度的認知，進而來選擇出一個適當的投資組合模式，而不能只是像過去傳統的投資理論文獻一樣，僅在意投資模式的理論探討或將就在計算上的方便性。

五、各模型於不同風險區域之 Sharpe 值比較

本研究進一步將每個投資組合模型於不同風險區域所計算出來的平均數和變異數進行統整，進而計算出 Sharpe 值，藉以分析各個投資組合模型在何種風險區域的投資績效表現較佳。由表4可發現，在不同風險區域下，不同投資模式所得 Sharpe 值的排序上有所差異，其中在低度風險區域下，MSV的Sharpe值最高且MMAD模型最低；而在中度風險區域下，MCVaR的Sharpe 值最高且 MMAD 模型亦是最低；最後，在高度風險區域下，MCVaR的Sharpe值最高且MSV模型為最低。從此表中，亦可發現在三個風險區域中，傳統的MV模型所得到的Sharpe值相對較差。

表 4　不同投資模型在不同風險區域之 Sharpe 值比較

模型	低風險區域之效率投資組合	中風險區域之效率投資組合	高風險區域之效率投資組合
MV	-0.179	-0.171	-0.111
MLPM	-0.156	-0.163	-0.113
MSV	-0.137	-0.166	-0.113
MMAD	-0.189	-0.181	-0.109
MCVaR	-0.165	-0.160	-0.097

伍、研究結論

本研究利用 MV、MSV、MLPM、MMAD 以及 MCVaR 投資組合模型，在市場資料下的分析結果進行比較，以效率投資組合的資產配置情形與相似度指數，來探討此五種投資組合模型之間的最適投資決策之差異。文中觀察在不同的風險區域下，上述五種投資組合模型的最適投資決策之變化情形，提供投資者在進行資金投資配置之參考。本文發現在樣本資料分析相似度部分，MLPM 與 MSV 之間的相似度指數位居第一，而 MV 與 MMAD 之間的相似度指數較高。最後，在不同風險區域下，不同投資模式所得Sharpe 值的排序上有所差異，在低度風險區域下，MSV 的 Sharpe 值最高；而在中度風險區域下，MCVaR 的 Sharpe 值最高；而在高度風險區域下，MCVaR 的 Sharpe 值最高，但模式間的差異性不大。

參考文獻

1. Angelelli R., R. Mansini, and M. G. Speranza (2008), "A comparison of MAD and CVaR models with real features," *Journal of Banking & Finance*, Vol.32, No.7, pp.1188-1197.
2. Artzner, P., F. Delbaen, J. Eber, and D. Heath, (1999), "Coherent measure of Risk," *Mathematical Finance*, Vol.9, No.3, pp.203-228.
3. Bawa, V. S. (1975), "Optimal Rules for Ordering Uncertain Prospects," *Journal of Financial Economics*, Vol.2, pp.95-121.
4. Bawa, V. S. and E. B. Lingenberg (1977), "Capital Market Equilibrium in A Mean-Lower Partial Moment Framework," *Journal of Financial Economics*, Vol.5, pp.189-200.
5. Byrne, P. and L. Lee (2004), "Different Risk Measures: Different Portfolio Compositions?" *Journal of Property Investment and Finance*, Vol.22, No.6, pp.501-511.
6. Campbell, R., R. Huisman, and K. Koedijk (2001), "Optimal Portfolio Selection in a Value-at-Risk Framework," *Journal of Banking & Finance*, Vol.25, pp.1789-1804.
7. Cuthbertson, K. (1996), *Quantitative Financial Economics-Stocks, Bonds and Foreign Exchange*, New York, John Wiley & Sons.
8. Estrada, J. (2002), "Systematic Risk in Emerging Markets: The D-CAPM," *Emerging Markets Review*, Vol.3, No. 4, pp.365-379.
9. Estrada, J. (2007), "Mean-Semivariance Behavior: Downside Risk and Capital Asset Pricing," *International Review of Economics and Finance*, Vol.16, No. 2, pp.169-185.
10. Estrada, J. (2008), "Mean-Semivariance Optimization: A Heuristic Approach," *Journal of Applied Finance*, Vol.14, No.1, pp.57-72.
11. Evans, J. L. (2004), "Wealthy Investor Attitudes, Expectations, and Behaviors toward Risk and Return," *The Journal of Wealth Management*, Vol.7, No.1, pp.12-18.
12. Fishburn, P. C. (1977), "Mean-Risk Analysis with Risk Associated with Below-Target Returns," *The American Economic Review*, Vol.67, pp.116-126.
13. Gordon, J. A. and Alexandre, M. B. (2002), "Economic Implications of using a Mean-VaR Model for Portfolio Selection: A Comparison with Mean-Variance Analysis," *Journal of Economic Dynamics & Control*, Vol.26, pp.1159-1193.
14. Hogan, W. and M. Warren (1974), "Toward the Development of an Equilibrium Capital-Market Model Based on Semivariance," *Journal of Financial Quantitative Analysis*, Vol.9, No.1, pp.1-11.
15. Konno, H. (1990), "Piecewise Linear Risk Functions and Portfolio Optimization," *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol. 33, pp.139-156.

16. Konno, H. and H. Yamakazi (1991), “Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and its Applications to the Tokyo Stock Market,” *Management Science*, Vol.37, No.5, pp.519-531.
17. Lee, C. L. (2006), “Downside Risk Analysis in Australin commercial Property,” *Australian Property Journal*, Vol.39, No.1, pp.16-20.
18. Lee, C. L. (2007), “The Strengths and Limitations of Risk Measures in Real Estate: A Review,” *Malaysian Journal of Real Estate*, Vol.1, No.1, pp.68-74.
19. Lucas, A. and P. Klaassen (1998), “Extreme Returns, Downside Risk, and Optimal Asset Allocation,” *Journal of Portfolio Management*, Vol.25, No.1, pp.71-79.
20. Markowitz, H. (1952), “Portfolio Selection,” *Journal of Finance*, Vol.7, No.1, pp.77-91.
21. Markowitz, H. (1959), *Portfolio Selection*, 1st Edition, New York: John Wiley & Sons.
22. Nawrocki, D. N. (1999), “A Brief History of Downside Risk Measures,” *Journal of Investing*, Vol. 8, pp.9-25.
23. Patrick, R., (1982) “An Extension of Shapiro and Wilk's W Test for Normality to Large Samples,” *Applied Statistics*, Vol.31, pp.115-124.
24. Phillips, H. E. (1993), “Portfolio Optimization Algorithms, Simplified Criteria, and Security Selection: A Contrast and Evaluation,” *Review of Quantitative Finance and Accounting*, Vol.3, pp.91-97.
25. Rockafellar, R. T. and S. Uryasev (2000), “Optimization of Conditional Value-At-Risk,” *The Journal of Risk*, pp.21-41.
26. Roy, A. D. (1952), “Safety First and The Holding of Assets,” *Econometrica*, Vol.20, pp.431-440.

Soochow Journal of Economics and Business
No.70 (September 2010)：29-56.

Comparative Analysis of Efficient Portfolios under Different Risk Measurements

Chin-Hsiung Hsu*, Ching-Shih Tsou, Po -Wei Yeh*****

Abstract

Traditionally, the measure of risk used in portfolio optimization models is the variance. Markowitz (1952) proposed the famous mean-variance (MV) model for the modern portfolio theory by defining variance as risk. However, a major obstacle in the application of the mean-variance model is the computational complexity of estimating the covariance matrix by the MV model. Thus, Konno and Yamazaki (1991) proposed the mean-mean absolute deviation (MMAD) as alternative to the mean variance (MV) model to avoid this shortcoming. On the other side, many researchers had proposed different points of view to measure risks in the portfolio theory. For example, Markowitz (1959) proposed another risk measurement, semivariance (SV). Recently, Estrada (2008) solved the optimization portfolio problems by evaluating the downside risk which is derived from the concept of the semivariance. Next, Bawa and Lindenberg (1977) developed a theory to evaluate the downside risk model named "Mean Lower-Partial-Moment" (MLPM) model which is derived from the concept of the Lower Partial Moment. Finally, Rockafellar and Uryasev (2000) proposed "Mean Conditional Value-at-Risk" (MCVaR) model which is derived from the concept of the Conditional Value-at-Risk (CVaR). The main subject of this paper is to find out the optimal portfolio by the comparison and analysis of the portfolio risk measured by variance, the portfolio risk measured

* Department of Financial Engineering and Actuarial Mathematics.
** Department of Business Administration, National Taipei College of Business.
*** Department of Business Administration, National Taipei College of Business.

by SV, the portfolio risk measured by LPM, the portfolio risk measured by CVaR, and the portfolio risk measured by MAD. Finally, we find that MLPM model has the higest similarity index with MSV model, and MV and MMAD model are more relative similar with each other.

Keywords: lower partial moment、semivariance、mean absolute deviation、conditional value-at-risk、portfolio performance measurement